UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01018566 8

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/recherchesanalyt00lava

Mat A1
L 394 r

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

PAR

M. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN
Professeur à l'Université de Louvain.

PREMIÈRE PARTIE

LES NOMBRES PREMIERS EN GÉNÉRAL.

DEUXIÈME PARTIE

LES FONCTIONS DE DIRICHLET ET LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME LINÉAIRE $Mx + N$.

TROISIÈME PARTIE

LES NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES PAR UNE FORME QUADRATIQUE DE DÉTERMINANT NÉGATIF.

IV et V

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE,
Rue de Louvain, 112.

1897

47465
23/2/00

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX, 2e partie, 1896.

QA
246
L38

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

PREMIÈRE PARTIE

LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN ET LES NOMBRES PREMIERS EN GÉNÉRAL

CHAPITRE PREMIER.

OBJET DE LA PREMIÈRE PARTIE DU MÉMOIRE. RAPPEL DE QUELQUES FORMULES CONNUES (*).

1. *Première définition de la fonction* $\zeta(s)$. — La fonction dont nous allons nous occuper est la fonction définie par les relations

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

où la somme s'étend à tous les nombres entiers naturels, le produit à tous les nombres premiers successifs. Ces formules supposent que la partie réelle de s que nous désignerons par

(*) RIEMANN, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* WERKE (Leipzig, 1866), pp. 136 et suiv. — HADAMARD, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.* JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, 1893.

$\Re(s)$ est supérieure à l'unité. La somme et le produit infini sont alors absolument et uniformément convergents pour $\Re(s) > 1 + \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε, et représentent, par conséquent, une fonction uniforme et synectique de s pour $\Re(s) > 1$.

2. *Objet de la première partie du mémoire.* — La formule

$$\zeta(s) = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

montre déjà que la fonction $\zeta(s)$ ne peut s'annuler pour $\Re(s) > 1$, car le produit infini est convergent dans cette hypothèse. Mais on ne peut pas en conclure que la fonction ne puisse s'annuler pour une valeur de la forme

$$s = 1 + \beta i,$$

dans laquelle $\Re(s) = 1$, car, pour une valeur semblable, la série

$$\sum \frac{1}{p^{1+\beta i}},$$

étendue aux nombres premiers, n'est pas absolument convergente, et il devient difficile de reconnaître si elle a une valeur finie. Dès lors, on ne peut affirmer, sans démonstration nouvelle, que le produit infini ne tend pas vers zéro, quand on fait tendre s vers une valeur de cette forme. A notre connaissance même, cette démonstration n'a pas été faite jusqu'à présent. L'objet essentiel de cette partie du mémoire sera de la fournir. Nous établirons donc avec une entière rigueur que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de racines de la forme $1 + \beta i$, et nous en déduirons quelques conséquences asymptotiques importantes pour la théorie des nombres premiers.

Auparavant, nous allons rappeler quelques résultats bien connus aujourd'hui et qui seront indispensables dans la suite.

3. *Expression de* $\zeta(s)$ *pour* $\Re(s) > 0$. — Les formules (1) ne sont valables que pour $\Re(s) > 1$. Il convient donc d'en trouver d'autres capables de fournir le prolongement analytique de la fonction. On en obtient une qui peut être utile (*) par le raisonnement très élémentaire que voici :

On a par une simple intégration par parties, portant sur dx :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(n+x)^s} = \frac{1}{(n+1)^s} + s\int_0^1 \frac{xdx}{(n+x)^{s+1}}.$$

La substitution de cette valeur de $(n+1)^{-s}$ dans l'expression de $\zeta(s)$ pour $\Re(s) > 1$, donne

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^1 \frac{dx}{(n+x)^s} - s\int_0^1 \frac{xdx}{(n+x)^s}\right].$$

Cette expression se simplifie, parce que l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{dx}{(n+x)^s} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1},$$

et il vient finalement

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta(s) &= 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_1^{\infty}\int_0^1 \frac{xdx}{(n+x)^{s+1}}, \\ \frac{\zeta(s)}{s} &= -\left[\frac{1}{1-s} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{xdx}{(n+x)^{s+1}}\right]. \end{aligned} \right.$$

La série du second membre est absolument convergente, pourvu que $\Re(s)$ soit plus grand que zéro. Le second membre de l'équation (2) nous fournit donc une définition de $\zeta(s)$ applicable à toute la portion du plan située à droite de l'axe imagi-

(*) J'ai déjà utilisé cette formule dans un mémoire présenté récemment à l'Académie royale de Belgique : *Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique.*

naire. On peut en déduire immédiatement plusieurs conséquences importantes :

1° La fonction $\zeta(s)$ est méromorphe pour $\Re(s) > 0$ et possède, dans cette région, un pôle unique et simple $s = 1$;

2° Si l'on attribue à s une valeur réelle, positive, intermédiaire entre zéro et un, le second membre de l'équation (2) sera négatif et $\zeta(s)$ ne pourra s'annuler;

3° Si $\zeta(s)$ possède des racines dont la partie réelle est plus grande que zéro, ces racines seront nécessairement imaginaires et conjuguées deux à deux.

4. *Relation fonctionnelle de Riemann* (*) *et Schlömilch. Définition de* $\zeta(s)$ *pour* $\Re(s) < 0$. — La fonction $\zeta(s)$ satisfait à une relation fonctionnelle qui constitue la propriété la plus remarquable de cette fonction et qui est la suivante :

$$(3) \quad \ldots\ldots \zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\zeta(s).$$

Cette relation, comme le remarque Riemann, peut s'exprimer par ce fait que la fonction

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

reste invariable par le changement de s en $1-s$.

La formule (3) achève de définir $\zeta(s)$ comme fonction uniforme de s dans tout le plan, car elle exprime $\zeta(s)$ pour $\Re(s)$ négatif, en fonction de $\zeta(s)$ pour $\Re(s)$ positif, qui est une fonction connue.

La formule (3) peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s),$$

(*) *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* WERKE (Leipzig, 1876), pp. 136 et suiv.

et elle renferme des conséquences importantes relatives aux zéros de $\zeta(s)$. Le second membre de la dernière équation devient infini si s est égal à zéro ou à un nombre pair négatif $-2m$, et il ne le devient que dans ce cas. Donc si l'on suppose $\mathfrak{R}(s) < 0$, $\zeta(1-s)$ ne pouvant s'annuler, on voit que $\zeta(s)$ n'aura que des racines réelles comprises dans la formule

$$s = -2m.$$

Nous les appellerons les *racines réelles* de $\zeta(s)$. En dehors de celles-là, toute racine de $\zeta(s)$ devra être aussi une racine de $\zeta(1-s)$. Donc $\zeta(s)$ ne pourra plus avoir que des racines imaginaires conjuguées deux à deux (n° 3, 3°) et dont la partie réelle doit être comprise entre *zéro* et *un* (limites non exclues jusqu'à présent). Nous les appellerons les racines imaginaires de $\zeta(s)$ et nous y reviendrons dans un instant.

5. *Définition de la fonction* $\xi(t)$. — Riemann ramène la fonction $\zeta(s)$ à une fonction plus simple, qu'il désigne par $\xi(t)$. Celle-ci est *holomorphe* dans toute l'étendue du plan et elle est liée à $\zeta(s)$ par la relation

$$(4) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} + ti \\ \xi(t) &= \frac{s(s-1)}{2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}. \end{aligned} \right.$$

La fonction $\xi(t)$ peut être définie directement, pour toute valeur de t, par la formule

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi(t) &= \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{t}{2}\log x\right)dx \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}. \end{aligned} \right.$$

La formule (4) met aussi en pleine lumière le caractère analytique de $\zeta(s)$ et en fait connaître les principales propriétés. Elle

nous montre que si $\zeta(s)$ a des racines imaginaires, elles doivent correspondre à des racines de $\xi(t)$. Cette formule ramène donc l'étude des zéros de $\zeta(s)$ à celle des zéros de $\xi(t)$, sur lesquels nous allons porter maintenant notre attention.

6. *Existence des racines de* $\xi(t)$. — La fonction $\xi(t)$ possède une infinité de racines, que l'on désigne en général par la lettre α et dont l'existence a été mise hors de doute par M. Hadamard dans un mémoire fondamental (*).

La formule (5) montre que $\xi(t)$ est une fonction paire de t; par conséquent, les racines α de $\xi(t)$ seront deux à deux égales et de signes contraires. La loi de croissance des modules de ces racines est d'une extrême importance. Cette loi soupçonnée par Riemann a été rigoureusement démontrée par M. Hadamard et peut s'exprimer comme il suit :

Supposons que l'on range les racines α (deux à deux égales et de signes contraires) par ordre de modules croissants

$$(\alpha_1, -\alpha_1), \quad (\alpha_2, -\alpha_2), \quad \ldots \quad (\alpha_p, -\alpha_p), \quad \ldots$$

et désignons par ρ_p le module de α_p, ρ_p vérifiera une relation de la forme

$$\rho = k\frac{p}{\log p},$$

dans laquelle k reste compris entre deux limites positives indépendantes de p. On a, en particulier,

$$k > \frac{4-\varepsilon}{e}.$$

Nous aurons à utiliser ce résultat, mais sous une forme un peu différente. On conclut de ce qui précède que la série

$$\frac{1}{\rho_1^m} + \frac{1}{\rho_2^m} + \cdots + \frac{1}{\rho_p^m} + \cdots,$$

(*) *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.* JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, 1893.

étendue à tous les modules successifs des racines α, est *absolument* convergente pourvu que l'on ait $m > 1$ (l'égalité étant exclue). Or il est clair que ce résultat subsistera sans changement, si les quantités ρ_p au lieu d'être les modules des racines de $\xi(t)$ représentent les modules des racines correspondantes de $\zeta(s)$, car, ces racines étant liées par la relation

$$s = \frac{1}{2} + ti,$$

leurs modules seront des quantités du même ordre de grandeur.

7. *Genre de la fonction* $\xi(t)$. *Expressions de* $\xi(t)$ *en produit infini et de* $\log \xi(t)$ *en série.* — M. Hadamard déduit des résultats précédents que la fonction $\xi(t)$ est du genre zéro en t^2, c'est-à-dire qu'elle peut se développer en un produit de facteurs primaires

$$\xi(t) = \xi(0)\Pi\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

sans aucun facteur exponentiel. On sait d'ailleurs que ce produit sera uniformément convergent dans toute région déterminée du plan.

On tire de l'équation précédente

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \log \xi(t) = \log \xi(0) + \sum_{\alpha} \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right).$$

Nous avons intérêt, pour simplifier l'écriture, à exprimer le second membre au moyen de la variable s, et la chose est facile. On a, en effet,

$$\log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) = \log\left(1 + \frac{-t}{\alpha}\right) + \log\left(1 - \frac{-t}{\alpha}\right)$$
$$= \left[\log i(\alpha - t) - \log \alpha i\right] + \left[\log i(-\alpha - t) - \log(-\alpha i)\right],$$

et, par la substitution

$$-it = \frac{1}{2} - s,$$

cela se réduit à

$$\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right)=\log\left(\frac{1}{2}-s+\alpha i\right)+\log\left(\frac{1}{2}-s-\alpha i\right)-\log\alpha^2$$

$$=\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)+\log\frac{\alpha^2+\frac{1}{4}}{\alpha^2}.$$

Substituons ce résultat dans la formule (6). Nous obtiendrons le développement suivant, qui sera absolument et uniformément convergent dans toute région ne contenant pas de racines :

$$(7)\qquad \log\xi(t)=C+\sum_{\alpha}\left[\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right].$$

8. *Expression correspondante de* $D\log\zeta(s)$. — Remarquons d'abord que la formule (7) peut se mettre sous une forme plus simple et beaucoup plus avantageuse au point de vue qui nous occupe. Les quantités $\left(\frac{1}{2}+\alpha i\right)$, $\left(\frac{1}{2}-\alpha i\right)$ ne sont autre chose que les racines imaginaires de $\zeta(s)$. Dans toute la suite du mémoire, nous conviendrons de représenter ces racines tout simplement par la lettre ρ. La formule (7) peut alors s'écrire

$$(8)\quad .\quad .\quad .\quad .\qquad \log\xi(t)=C+\sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right),$$

pourvu que, dans cette somme, on range les racines ρ dans le même ordre que les racines α dans l'équation (7). Pour cela, il suffit de les ranger par ordre de modules croissants, de manière à introduire simultanément celles qui auraient le même module.

Revenons maintenant à la formule (4) qui s'écrit encore

$$\xi(t)=\frac{s-1}{2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}.$$

On en tire

$$\log\zeta(s)=\frac{s}{2}\log\pi-\log\frac{s-1}{2}-\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)+\log\xi(t),$$

et, par la formule (8),

$$(9) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \log \zeta(s) = C + \frac{s}{2} \log \pi - \log \frac{s-1}{2} \\ - \log \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right). \end{aligned} \right.$$

Différentions cette équation, ce qui se fait sans difficulté à cause de l'uniformité de la convergence. Il vient

$$(10) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{s-1} - D \log \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho}.$$

C'est la formule qui va jouer le rôle essentiel dans notre démonstration, et il nous était indispensable de rappeler comment elle s'obtient. La somme Σ du second membre s'étend à toutes les racines imaginaires de $\zeta(s)$ rangées par ordre de modules croissants, et il s'agira plus tard de prouver qu'aucune de ces racines n'est de la forme $1 + \beta i$.

9. *Racines multiples hypothétiques de* $\zeta(s)$. — Rien ne permet d'affirmer jusqu'à présent que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de racines multiples. S'il y avait une racine ρ multiple, il faudrait dans la somme Σ de la formule (10) répéter le terme $\frac{1}{s-\rho}$ un nombre de fois égal à l'ordre de multiplicité de cette racine.

On peut toutefois montrer, dès à présent, que si, par impossible, une racine ρ était de la forme $1 + \beta i$, elle ne pourrait pas être multiple.

La formule (1) donne, en effet, pour $\Re(s) > 1$,

$$D \log \zeta(s) = -\sum \frac{lp}{p^s - 1} = -\sum \frac{lp}{p^s} - \sum \frac{lp}{p^s(p^s - 1)}.$$

D'autre part, la théorie des fonctions nous apprend que l'ordre de multiplicité λ d'une racine ρ est égal à l'expression

$$\lambda = \lim_{s=\rho} (s - \rho) D \log \zeta(s),$$

qui se réduit par la décomposition précédente, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, à

$$\lambda = \lim_{s=\rho} \left[-(s-\rho) \sum \frac{lp}{p^s} \right].$$

Si $\rho = 1 + \beta i$, on aura donc

$$\lambda = -\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum \frac{lp}{p^{1+\beta i+\varepsilon}}.$$

Nous savons aussi que le point $s = 1$ est un pôle *simple* de $\zeta(s)$, et que, par conséquent,

$$1 = -\lim_{s=1} (s-1) \, \mathrm{D} \log \zeta(s) = \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum \frac{lp}{p^{1+\varepsilon}}.$$

Or, tous les termes de cette dernière somme sont les modules des termes de la somme qui intervient dans la valeur de λ. Donc λ ne peut surpasser cette somme, et comme celle-ci est égale à l'unité, $s = \rho$ ne peut être qu'un zéro simple.

CHAPITRE II.

CALCUL ET PROPRIÉTÉS DE PLUSIEURS INTÉGRALES DÉFINIES.

---

§ 1. — *Étude de l'intégrale* $\frac{1}{2\pi i} \int_{a\ bi}^{a+bi} y^s \frac{ds}{s+k}$.

10. L'intégrale dont nous allons nous occuper dans le paragraphe actuel est bien connue, et ses propriétés, quand b tend vers l'infini, sont une source féconde de transformations analytiques dont nous allons profiter. Les géomètres qui les ont utilisées n'ont pas toujours pris les précautions nécessaires pour ne laisser flotter aucun doute sur l'exactitude des résultats qu'ils ont obtenus. C'est ainsi que l'on rencontre souvent des changements d'ordre d'intégration, et des intégrations de série terme

par terme, même entre des limites infinies, qui ne sont pas justifiées, et dont la justification, parfois inabordable, est souvent plus difficile que les auteurs ne semblent le supposer (*).

Afin de prévenir le même reproche, nous allons, dans ce paragraphe, déterminer les limites supérieures de l'intégrale en question dans différentes hypothèses qui se présenteront plus tard. Nous commencerons par la ramener à une autre, qui est étroitement liée à la théorie des séries de Fourier et dont les propriétés sont plus faciles à dégager.

11. Théorème. — *Désignons par* s *une variable imaginaire, par* a, b *et* y *des quantités réelles, enfin par* k *une quantité réelle ou imaginaire mais telle que l'on ait*

$$\Re(a+k) > 0;$$

je dis qu'on aura la relation

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} y^s \frac{ds}{s+k} = \frac{1}{\pi} y^{-k} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t}\, dt.$$

Démonstration. Posons la relation

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} y^{s+k} \frac{ds}{s+k}.$$

On en tire, en différentiant,

$$f'(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} y^{s+k-1} ds = \frac{1}{\pi} y^{a+k-1} \frac{\sin bly}{ly}.$$

(*) Je vise tout particulièrement ici l'ouvrage de M. P. Bachmann, excellent à d'autres points de vue, *Die analytische Zahlentheorie*. Leipzig, 1894. — La thèse de M. Cahen *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann* (Paris, 1894) soulève les mêmes critiques.

Dans l'hypothèse faite sur $a+k$, $f(0)=0$; par conséquent, la relation précédente donnera par intégration

$$f(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^y y^{a+k-1}\frac{\sin bly}{ly}\,dy.$$

Enfin, en changeant la variable d'intégration par la relation $ly=t$, il vient

$$f(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt,$$

et cette équation équivaut à l'équation (1).

12. On déduit sans peine du second théorème de la moyenne que l'on a

1° pour $y>1$, $\lim\limits_{b=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt=1;$

2° pour $y=1$, $\lim\limits_{b=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt=\frac{1}{2};$

3° pour $y<1$, $\lim\limits_{b=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt=0.$

On en conclut que l'on a aussi

1° pour $y>1$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^s\frac{ds}{s+k}=y^{-k};$

2° pour $y=1$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^s\frac{ds}{s+k}=\frac{1}{2}y^{-k};$

3° pour $y<1$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} y^s\frac{ds}{s+k}=0.$

C'est là un résultat (*) bien connu et qui nous sera utile, mais qui s'obtient plus aisément par un calcul de résidu. Aussi ce n'est pas pour l'établir que nous avons fait la transformation exprimée par l'équation (1). C'est bien plutôt afin d'obtenir des limites supérieures du module de l'intégrale quand b varie. Ce sont ces limites que nous allons chercher maintenant.

13. Théorème. — *Si* a + k *est réel et positif, on peut assigner au second membre de l'équation* (1), *savoir*

$$\operatorname{mod} \frac{1}{\pi} y^{-k} \int_{-\infty}^{ty} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt,$$

une limite supérieure indépendante de k *et de* b.

Démonstration. La fonction réelle $e^{(a+k)t}$ est constamment croissante avec t et l'on peut appliquer à l'intégrale le second théorème de la moyenne, de manière à faire sortir cette exponentielle du signe d'intégration (**). On aura donc, en désignant par ξ

(*) On voit que nous considérons ici *par définition* ces nouvelles intégrales comme étant la limite des intégrales prises entre les limites $a - bi$, $a + bi$ quand b tend vers l'infini. Cette convention n'est pas nécessaire pour obtenir les résultats indiqués ici, mais elle l'est pour toute la suite du mémoire et elle sera toujours observée.

(**) Ph. Gilbert, *Cours d'analyse* (4e édition, 1892), n° 316. Équation (A). Le théorème est celui-ci : Si $\varphi(x)$ est constamment croissant, on a

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b \psi(x)dx \qquad (b > \xi > a).$$

On peut aussi se servir de la formule

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b \psi(x)dx + \varphi(a+0)\int_a^\xi \psi(x)dx,$$

qui donne ici le même résultat.

Cette formule subsiste pour a ou b infini. Voir sur ce point : C. Jordan, *Cours d'analyse*, t. II, n° 219 (2e édition, Paris, 1894).

un nombre inconnu mais inférieur à ly,

$$\frac{1}{\pi} y^{-k} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt = \frac{1}{\pi} y^{a} \int_{\xi}^{ly} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} y^{a} \int_{b\xi}^{bly} \frac{\sin t}{t} dt,$$

et on en conclut

$$\operatorname{mod} \frac{1}{\pi} y^{-k} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt < \frac{1}{\pi} y^{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt < y^{a}.$$

14. Théorème. — *Si* $a + k = \alpha + \beta i$ *est une quantité complexe donnée, et* y *une quantité réelle inférieure à l'unité et qui tend vers zéro, on peut assigner au second membre de l'équation* (1)

$$\operatorname{mod} \frac{1}{\pi} y^{-k} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

une limite supérieure indépendante de b, *qui tend vers zéro avec* y *et qui est du même ordre que* y^a. *On suppose dans ce théorème que* $b > \beta$ *ne peut pas tendre vers* β *et que* a *est* > 0.

Démonstration. Décomposons l'intégrale comme il suit :

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt = \int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t} \left[\sin(b+\beta)t + \sin(b-\beta)t\right] \frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t} \left[\cos(b-\beta)t - \cos(b+\beta)t\right] \frac{dt}{t}.$$

Puisque y est < 1, on a $ly < 0$. D'autre part, $e^{\alpha t}$ est une fonction croissante et l'on peut appliquer aux deux intégrales réelles

du second membre le second théorème de la moyenne. Désignons, à cet effet, par ξ et ξ' des quantités négatives inconnues, on pourra poser, en remarquant que $e^{\alpha ly} = y^{\alpha}$,

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t}\, dt = \frac{1}{2} y^{\alpha} \int_{\xi}^{ly} \left[\sin(b+\beta)t + \sin(b-\beta)t\right] \frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{i}{2} y^{\alpha} \int_{\xi'}^{ly} \left[\cos(b-\beta)t - \cos(b+\beta)t\right] \frac{dt}{t},$$

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t}\, dt = \frac{1}{2} y^{\alpha} \left[\int_{(b+\beta)\xi}^{(b+\beta)ly} + \int_{(b-\beta)\xi}^{(b-\beta)ly} \frac{\sin t}{t}\, dt\right]$$

$$+ \frac{i}{2} y^{\alpha} \left[\int_{(b-\beta)\xi'}^{(b-\beta)ly} - \int_{(b+\beta)\xi'}^{(b+\beta)ly} \frac{\cos t}{t}\, dt\right].$$

Les deux premières intégrales du second membre sont respectivement moindres que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt < \pi.$$

La différence des deux suivantes se met sous la forme

$$\int_{(b+\beta)ly}^{(b-\beta)ly} \frac{\cos t}{t}\, dt - \int_{(b+\beta)\xi'}^{(b-\beta)\xi'} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

On voit ainsi qu'elle est inférieure à

$$\int_{(b+\beta)ly}^{(b-\beta)ly} + \int_{(b+\beta)\xi'}^{(b-\beta)\xi'} \frac{dt}{t} = 2 \log \frac{b+\beta}{b-\beta},$$

quantité qui décroît quand $b > \beta$ augmente.

Notre première intégrale vérifie donc une relation de la forme

$$\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-k)t} \frac{\sin bt}{t} dt = Ay^{\alpha} = Ay^{\alpha+k-\beta i},$$

dans laquelle A reste compris entre des limites finies indépendantes de b. On a donc aussi

$$\frac{1}{\pi} y^{-k} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt = \left[Ay^{-\beta i}\right] y^{a} = My^{a},$$

où M reste compris entre des limites finies indépendantes de b et de y, et c'est le résultat que nous voulions démontrer.

15. Théorème. — *Soient* a *et* y *deux nombres positifs donnés supérieurs à l'unité, et soit*

$$a + k = \alpha \pm \beta i$$

un nombre complexe variable, dans lequel α *et* β *sont des nombres positifs qui peuvent croître indéfiniment mais où l'on suppose que* α *ne peut pas tendre vers zéro ; je dis qu'on peut assigner au second membre de l'équation* (1)

$$\text{mod} \frac{y^{-k}}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

une limite supérieure indépendante de b *et de* α. *Cette limite devra dépendre de* β, *mais ne devra pas être d'un ordre supérieur à* $\sqrt{\beta}$ (*ni* à fortiori *à* $\sqrt{\text{mod } k}$).

Nous supposerons dans la démonstration β précédé du signe $+$, la démonstration étant la même dans les deux cas.

On peut négliger, dans la démonstration, le facteur

$$\frac{1}{\pi} y^{\alpha-k} = \frac{1}{\pi} y^{a-\beta i},$$

qui conserve toujours une valeur finie, et, par conséquent, se borner à démontrer le théorème pour l'intégrale

$$y^{-\alpha}\int_{-\infty}^{ly} e^{(\alpha+\beta i)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt.$$

Pour faire cette démonstration, nous décomposons l'intégrale en plusieurs autres vérifiant séparément les conditions de l'énoncé.

Elle se décompose d'abord en deux autres

$$y^{-\alpha}\int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}\cos\beta t\frac{\sin bt}{t}\,dt + iy^{-\alpha}\int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}\sin\beta t\frac{\sin bt}{t}\,dt.$$

La première reste inférieure à une limite assignable indépendante de b et de β, car, par la relation

$$2\cos\beta t\sin bt = \sin(b+\beta)t + \sin(b-\beta)t,$$

elle se décompose encore en deux autres à chacune desquelles le théorème du n° 13 est applicable.

Il ne reste donc à examiner que la seconde intégrale

$$y^{-\alpha}\int_{-\infty}^{ly} e^{\alpha t}\sin\beta t\frac{\sin bt}{t}\,dt.$$

Choisissons une constante c assez grande pour qu'on ait

$$\frac{1}{\sqrt{c}} < ly,$$

et décomposons l'intégrale en trois autres

$$y^{-\alpha}\left[\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\beta+c}}}^{ly} e^{\alpha t}\sin\beta t\sin bt\,\frac{dt}{t}\right].$$

Je dis que chacune de ces trois intégrales vérifie les conditions de l'énoncé :

Dans les deux intégrales extrêmes, on a constamment

$$\left| \sin \beta t \sin bt \frac{1}{t} \right| < \left| \frac{1}{t} \right| < \sqrt{\beta + c}.$$

Par conséquent, la première est inférieure à

$$y^{-\alpha} \sqrt{\beta + c} \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} dt < \sqrt{\beta + c} \frac{1}{\alpha} y^{-\alpha} < \frac{\sqrt{\beta + c}}{\alpha},$$

et la dernière à

$$y^{-\alpha} \sqrt{\beta + c} \int_{0}^{ly} e^{\alpha t} dt < \frac{\sqrt{\beta + c}}{\alpha}.$$

Dans l'intégrale du milieu, on a

$$\left| \frac{\sin bt \sin \beta t}{t} \right| < \left| \frac{\sin \beta t}{t} \right| < \beta;$$

et, par l'hypothèse faite sur c,

$$e^{\alpha t} < e^{\frac{\alpha}{\sqrt{\beta + c}}} < e^{\alpha l y} = y^{\alpha};$$

donc cette intégrale est inférieure à

$$\beta y^{-\alpha} \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta + c}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta + c}}} e^{\alpha t} dt < \beta \int_{-\frac{1}{\sqrt{\beta + c}}}^{\frac{1}{\sqrt{\beta + c}}} dt < 2\sqrt{\beta}.$$

Ces trois dernières limites sont de l'ordre de $\sqrt{\beta}$, par conséquent le théorème est démontré.

§ 2. — *Étude de l'intégrale* $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}$.

16. Dans l'étude que nous allons faire de cette intégrale, nous admettrons toujours que l'on a

$$\Re(a-u)>0\,,\quad \Re(a-v)>0.$$

Cette hypothèse est nécessaire, pour que la condition analogue exprimée dans le théorème du n° 11 soit réalisée dans les applications que nous allons avoir à faire de ce théorème.

17. Premier cas. $\varphi(s)$ *est une constante.* — Posons d'abord

$$\varphi(s)=C,$$

C étant une constante. On aura la formule de décomposition

$$\frac{C}{(s-u)(s-v)}=\frac{C}{u-v}\frac{1}{s-u}-\frac{C}{u-v}\frac{1}{s-v}.$$

En vue des applications ultérieures, nous mettrons cette formule sous la forme

$$\frac{\varphi(s)}{(s-u)(s-v)}=\frac{\varphi(u)}{u-v}\frac{1}{s-u}-\frac{\varphi(v)}{u-v}\frac{1}{s-v},$$

et nous aurons ainsi :

$$\int_{a-bi}^{a+bi}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}=\frac{\varphi(u)}{u-v}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s-u}-\frac{\varphi(v)}{u-v}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s-v}.$$

Cette relation se transforme par l'équation (1) dans la suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \varphi(s)\,\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{\varphi(u)y^u}{u-v}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt \\ &\quad - \frac{\varphi(v)y^v}{u-v}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait tendre b vers l'infini, on aura, par les formules du n° 12 :

1° pour $y > 1$, $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varphi(s)\,\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi(u)y^u - \varphi(v)y^v}{u-v}$;

2° pour $y < 1$, $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varphi(s)\,\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = 0$

18. Deuxième cas. *$\varphi(s)$ est une fraction simple.* — Posons ensuite

$$\varphi(s) = \frac{1}{s+k}$$

et supposons qu'on ait toujours la relation $\Re(a+k) > 0$. On aura la formule de décomposition (on suppose u et v différents de k)

$$\frac{1}{(s+k)(s-u)(s-v)} = \frac{A}{s-u} + \frac{B}{s-v} + \frac{C}{s+k},$$

les coefficients ayant pour valeur

$$A = \frac{1}{(u+k)(u-v)} = \frac{\varphi(u)}{u-v}, \quad B = \frac{1}{(v+k)(v-u)} = \frac{\varphi(v)}{v-u},$$

$$C = \frac{1}{(u+k)(v+k)}.$$

D'après cela, nous pourrons écrire l'équation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}=\frac{\varphi(u)}{u-v}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s-u}$$

$$+\frac{\varphi(v)}{v-u}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s-v}$$

$$+\frac{1}{(u+k)(v+k)}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{y^s ds}{s+k}.$$

En transformant ces intégrales par l'équation (1), il viendra

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}&=\frac{\varphi(u)\,y^u}{u-v}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly}e^{(a-u)t}\frac{\sin bt}{t}dt\\&+\frac{\varphi(v)\,y^v}{v-u}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{y}e^{(a-v)t}\frac{\sin bt}{t}dt\\&+\frac{y^{-k}}{(u+k)(v+k)}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly}e^{(a+k)t}\frac{\sin bt}{t}dt.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait tendre b vers l'infini, on trouvera donc par les relations du n° 11 :

$$\text{pour } y>1,\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}&=\frac{\varphi(u)\,y^u-\varphi(v)y^v}{u-v}\\&+\frac{y^{-k}}{(u+k)(v+k)}).\end{aligned}\right.$$

Il y a donc maintenant un terme de plus que dans le cas précédent.

19. Si l'on fait en particulier $k=-1$, dans la formule précé-

dente, on obtiendra, pour $y > 1$,

$$(4) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s-1}\,\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{1}{u-v}\left[\frac{y^u}{u-1} - \frac{y^v}{v-1}\right] \\ &\quad + \frac{y}{(u-1)(v-1)}. \end{aligned} \right.$$

20. *Combinaison des cas précédents.* — Supposons maintenant que $\varphi(s)$ soit la somme d'une constante et d'un nombre *limité* de fractions simples, soit

$$\varphi(s) = C + \sum_n \frac{1}{s+k_n}.$$

Il est clair que l'on obtiendra par l'application répétée des formules de l'un des deux cas précédents à chacun des termes de cette somme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{\varphi(u)\,y^u}{u-v}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt \\ &\quad - \frac{\varphi(v)\,y^v}{u-v}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt \\ &\quad + \sum_n \frac{y^{-k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k_n)t}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on fait tendre b vers l'infini, il viendra, pour $y > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{\varphi(u)\,y^u - \varphi(v)\,y^v}{u-v} \\ &\quad + \sum_n \frac{y^{-k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)}. \end{aligned}$$

Il est bien entendu que dans cette formule on doit supposer u

et v différents de k, et, en outre,

$$\Re(a-u)>0, \quad \Re(a-v)>0, \quad \Re(a+k_n)>0.$$

21. *Extension au cas où $\varphi(s)$ a un développement illimité.* — Passons maintenant au cas où

$$\varphi(s)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s+k_n}$$

se développe en une somme illimitée de fractions simples. On ne peut pas généraliser, sans examen, les dernières formules, et il faut étudier les choses d'un peu plus près. On peut cependant énoncer le théorème général suivant où l'on verra l'utilité des calculs précédents :

Théorème. — *Si la quantité, variable avec* n, $\Re(a+k_n)$ *reste toujours comprise entre deux limites positives indépendantes de* n (*la limite zéro étant exclue*); *si, d'autre part, la série à termes positifs*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{mod}\left(\frac{1}{k_n}\right)^{\frac{3}{2}}$$

est convergente; enfin, si la série

$$\varphi(s)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s+k_n}$$

est uniformément convergente dans toute région finie du plan s *qui ne renferme pas de pôles* $-k_n$, *on aura, pour* $y>1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}=\frac{\varphi(u)y^u-\varphi(v)y^v}{u-v}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{-k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)}.$$

On suppose que u *et* v *ne sont pas des pôles et que les relations* $\Re(a-u)>0$, $\Re(a-v)>0$ *sont vérifiées.*

Démonstration. A cause de l'uniformité supposée de la convergence, on peut intégrer sans difficulté la série *pour toute valeur finie de* b. On trouve donc, comme dans le cas précédent,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \varphi(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi(u)y^u}{u-v}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t}\frac{\sin bt}{t}dt$$

$$-\frac{\varphi(v)y^v}{u-v}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t}\frac{\sin bt}{t}dt$$

$$+\sum_n \frac{y^{-k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k_n)t}\frac{\sin bt}{t}dt.$$

Je dis maintenant que, considérée comme fonction de b, la série du second membre converge uniformément alors même que b peut croître indéfiniment.

Pour le montrer, posons $a + k_n = \alpha_n + \beta_n i$. La partie réelle α_n variera entre des limites finies par hypothèse (la limite zéro étant exclue). Par conséquent, on peut appliquer le théorème du n° 15 : la quantité

$$\text{mod}\,\frac{1}{\pi}y^{-k_n}\int_{-\infty}^{ly} e^{(a+k_n)t}\frac{\sin bt}{t}dt$$

ne pourra pas surpasser, quand b et k_n varient, une quantité de la forme

$$M\sqrt{\beta_n}$$

ou, ce qui revient au même, une quantité de la forme

$$M\sqrt{k_n}$$

dans laquelle M est une constante donnée. Notre série aura donc tous ses termes moindres que ceux d'une série de la forme

$$M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k_n}}{(u+k_n)(v+k_n)},$$

qui est absolument convergente par hypothèse et dont les termes ne dépendent pas de b. Donc sa convergence uniforme est assurée.

On peut donc en toute rigueur faire tendre b vers l'infini et passer à la limite dans chaque terme. On obtient alors la relation énoncée dans le théorème et celui-ci est par conséquent démontré.

22. *Application.* — Le théorème précédent s'applique, en particulier, à la fonction

$$\varphi(s) = \sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho},$$

dans laquelle la sommation s'étend à toutes les racines imaginaires de la fonction $\zeta(s)$ rangées par ordre de modules croissants (n° 8). En effet, toutes les racines ρ ont leur partie réelle comprise entre *zéro* et *un*, et par conséquent, pourvu que l'on prenne $a > 1$, la partie réelle $\mathfrak{R}(a-k)$ ne pourra pas s'annuler et restera finie. D'autre part, la série

$$\sum \operatorname{mod} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}}$$

est convergente (n° 6). On aura donc, dans ce cas particulier,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \varphi(s) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi(u)y^u - \varphi(v)y^v}{u-v} + \sum_{\rho} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)},$$

et cette équation suppose que l'on a

$$y > 1, \quad a > 1, \quad \mathfrak{R}(a-u) > 0, \quad \mathfrak{R}(a-v) > 0.$$

Il est encore important de remarquer que dans la dernière série

$$\sum_{\rho} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}$$

la convergence est absolue, car les termes de cette série décrois-

sent comme ceux de la série $\Sigma \frac{1}{\rho^2}$ qui est absolument convergente. Il n'y a donc plus aucune attention à prendre à l'ordre dans lequel les termes sont rangés.

23. Nouvelle extension du théorème précédent. — *Soit* F (s) *une fonction entière du genre zéro ou du genre un. Désignons en général par* ρ_i (i=1, 2, ... n, ...) *les zéros de cette fonction. Si ces zéros* ρ *sont tous situés à gauche d'une droite* x=h, *et si la série*

$$\sum \frac{1}{\rho^{\frac{3}{2}}}$$

est absolument convergente, on aura, pour a > h,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D}\log \mathrm{F}(s)\,\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{1}{u-v}\left[y^u\frac{\mathrm{F}'(u)}{\mathrm{F}(u)} - y^v\frac{\mathrm{F}(v)}{\mathrm{F}(v)}\right]$$
$$+\sum_{\rho}\frac{y^{\rho_i}}{(u-\rho_i)(v-\rho_i)}.$$

Si la fonction F (s) est du genre zéro, on retombe immédiatement sur le théorème du n° 21. Supposons donc que F (s) soit du genre *un*. On peut poser par la formule de Weierstrass

$$\mathrm{F}(s) = \mathrm{F}(0)\, e^{\alpha s}\, \Pi\left(1-\frac{s}{\rho_i}\right) e^{\frac{s}{\rho_i}},$$

et l'on sait que ce produit est uniformément convergent dans toute région finie du plan s. Prenons les dérivées logarithmiques, il vient

$$\frac{\mathrm{F}'(s)}{\mathrm{F}(s)} = \alpha + \sum_{\rho}\left[\frac{1}{s-\rho_i} - \frac{1}{\rho_i}\right],$$

et cette série est uniformément convergente dans toute région ne contenant pas de racines ρ_i, donc, en particulier, pour $\Re(s) \gtreqless a$.

Désignons par $\varphi_n(s)$ la somme des n premiers termes de la série [supposée illimitée, car on retomberait sur un théorème antérieur (20) dans le cas contraire]

$$\varphi_n(s) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{s - \rho_i} - \frac{1}{\rho_i} \right];$$

on aura sans difficulté pour toute valeur finie de b, comme au n° 20,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \varphi_n(s) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{\varphi_n(u)}{u-v} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$- \frac{\varphi_n(v)}{u-v} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{y^{\rho_i}}{(u-\rho_i)(v-\rho_i)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-\rho_i t)} \frac{\sin bt}{t} dt.$$

Si l'on fait tendre n d'abord vers l'infini, $\varphi_n(s)$ converge uniformément vers sa limite $D \log F(s)$ sous le signe d'intégration au premier membre, et il vient, sans difficulté pour toute valeur finie de b,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} D \log F(s) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{y^u}{u-v} \frac{F'(u)}{F(u)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-u)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$- \frac{y^v}{u-v} \frac{F'(v)}{F(v)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-v)t} \frac{\sin bt}{t} dt$$

$$+ \sum_{\rho} \frac{y^{\rho_i}}{(u-\rho_i)(v-\rho_i)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{ly} e^{(a-\rho_i)t} \frac{\sin bt}{t} dt.$$

Si l'on fait maintenant tendre b vers l'infini, je dis que cette dernière série converge uniformément.

En effet, on sait (n° 15) que l'expression

$$\frac{y^{\rho_i}}{\pi}\int_{-\infty}^{ty} e^{(a-\rho_i)t}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt,$$

dans laquelle b et ρ_i varient et où $\Re\,(a-\rho_i)$ ne peut tendre vers zéro, admet une limite supérieure de la forme

$$M\sqrt{\operatorname{mod}\rho_i}$$

où M est une constante indépendante de b et de ρ. Donc tous les termes de la série qui nous occupe sont inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants de la série

$$M\sum\frac{\sqrt{\rho_i}}{(u-\rho_i)(v-\rho_i)},$$

qui est absolument convergente par hypothèse et dont les termes ne dépendent pas de b.

L'uniformité de la convergence est donc établie, b variant arbitrairement. Si on fait tendre b vers l'infini, on peut, dans la dernière équation, passer rigoureusement à la limite dans chaque terme, et l'on obtient ainsi l'équation qui figure dans l'énoncé du théorème.

Application. — On peut poser, dans le théorème précédent,

$$F(s)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

Cette fonction remplit toutes les conditions du théorème et les zéros ρ sont de la forme

$$\rho=-2m,\quad (m=1,2,\ldots).$$

On trouve ainsi, en changeant les signes,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D}\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = \frac{y^u}{u-v}\mathrm{D}\log\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)$$
$$-\frac{y^v}{u-v}\mathrm{D}\log\Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{-2m}}{(2m+u)(2m+v)}.$$

Cette équation suppose qu'on a

$$a>0,\quad \Re(a-u)>0,\quad \Re(a-v)>0.$$

§ 3. — *Application des résultats précédents à la fonction* $\mathrm{D}\log\zeta(s)$.

24. *Forme particulière de l'intégrale du paragraphe précédent pour* $\varphi(s)=\mathrm{D}\log\zeta(s)$. — Rappelons la formule établie au n° 8 :

$$\mathrm{D}\log\zeta(s)=\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{\log\pi}{2}-\frac{1}{s-1}-\mathrm{D}\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$$
$$+\sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho}.$$

Appliquons-lui respectivement les formules des n°s 17, 19, 22 et 23, nous obtiendrons, pour $y>1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\mathrm{D}\log\zeta(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}=\frac{1}{u-v}\left[y^u\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}-y^v\frac{\zeta'(v)}{\zeta(v)}\right]$$
$$-\frac{y}{(u-1)(v-1)}+\sum_{\rho}\frac{y^{\rho}}{(u-\rho)(v-\rho)}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{-2m}}{(2m+u)(2m+v)}.$$

Dans cette formule on doit d'abord supposer que u ou v n'est ni un pôle ni un zéro de $\zeta(s)$. On doit admettre que a est >1 et supérieur aux parties réelles de u et de v.

Enfin, nous rappellerons que y est une variable réelle positive et plus grande que *un*. La formule cesserait d'être vraie dans le cas contraire (*).

25. *Nouvelle expression de la même intégrale.* — Nous allons chercher maintenant une autre expression de la même intégrale. Elle se déduit de l'expression de $\zeta(s)$ en produit infini pour $\mathfrak{R}(s) > 1$ (n° 1). On trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\log\zeta(s) &= -\sum \frac{lp}{p^s - 1} \\ &= -\sum \frac{lp}{p^s} - \sum \frac{lp}{p^{2s}} - \sum \frac{lp}{p^{3s}} - \cdots \end{aligned}$$

On en conclut sans difficulté pour toute valeur finie de b, et pour $a > 1$,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi} \mathrm{D}\log\zeta(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= -\frac{1}{2\pi i}\sum lp \int_{a-bi}^{a+bi}\left(\frac{y}{p}\right)^s \frac{ds}{(s-u)(s-v)} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\sum lp \int_{a-bi}^{a+bi}\left(\frac{y}{p^2}\right)^s \frac{ds}{(s-u)(s-v)} \\ &\quad - \cdots. \end{aligned} \right.$$

On peut transformer les intégrales du second membre par les formules (2) du n° 17. On y fera d'abord $\varphi(s) = 1$, puis on changera successivement y en $\left(\frac{y}{p}\right)$, $\left(\frac{y}{p^2}\right)$, ... Une quelconque des intégrales du second membre se décompose alors comme il suit :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\left(\frac{y}{p^m}\right)^s \frac{ds}{(s-u)(s-v)} &= \frac{1}{u-v}\left(\frac{y}{p^m}\right)^u \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{l\left(\frac{y}{p^m}\right)} e^{(a-u)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt \\ &\quad -\frac{1}{u-v}\left(\frac{y}{p^m}\right)^v \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{l\left(\frac{y}{p^m}\right)} e^{(a-v)t}\frac{\sin bt}{t}\,dt. \end{aligned} \right.$$

(*) La vérification de la formule est facile en remarquant que le second membre est la somme des résidus de la fonction sous le signe d'intégration, relatifs aux pôles situés à gauche de la droite $x = a$.

Lorsque l'on fait tendre b vers l'infini, la limite du second membre de cette dernière équation est nulle (n° 11) pour $y < p^m$; pour $y > p^m$, au contraire, cette limite est égale à

$$\frac{1}{u-v}\left(\frac{y}{p^m}\right)^u - \frac{1}{u-v}\left(\frac{y}{p^m}\right)^v.$$

Pour $y = p^m$, cette limite serait encore différente, mais nous supposerons que y n'est pas une puissance d'un nombre premier.

Faisons maintenant tendre b vers l'infini et passons à la limite. Je dis que dans le second membre de l'équation (5) on pourra remplacer chaque terme par sa limite. Pour justifier cette assertion, il faut montrer que le second membre converge uniformément quand b varie de cette manière.

C'est ce qui a lieu. En effet, en vertu du théorème du n° 14, l'expression

$$\operatorname{mod}\frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{p^m}\right)^u \int_{-\infty}^{l\left(\frac{y}{p^m}\right)} e^{(a-u)t}\,\frac{\sin bt}{t}\,dt$$

reste inférieure, quel que soit b, à une quantité de la forme

$$\mathrm{M}\left(\frac{y}{p^m}\right)^a$$

où M est une constante convenable indépendante de b, de p et de m. On peut affirmer la même chose de l'intégrale

$$(u-v)\frac{1}{2\pi i}\int_{a-bi}^{a+bi}\left(\frac{y}{p^m}\right)^s \frac{ds}{(s-u)(s-v)},$$

qui se décompose par la formule (6) en deux expressions de cette nature. Donc, les termes du second membre de l'équation (5) sont inférieurs à ceux d'une série de forme

$$\mathrm{M}\,\frac{y^a}{u-v}\left[\sum\frac{lp}{p^a} + \sum\frac{lp}{p^{2a}} + \cdots\right],$$

qui est absolument convergente pour $a > 1$, et dont les termes ne dépendent pas de b. Donc, le second membre de l'équation (5) est uniformément convergent, comme nous voulions l'établir.

On peut donc passer à la limite dans chaque terme de cette équation et l'on trouve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} D\log\zeta(s)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} = -\frac{y^u}{u-v}\left[\sum_{p<y}\frac{lp}{p^u}+\sum_{p^2<y}\frac{lp}{p^{2u}}+\cdots\right]$$
$$+\frac{y^v}{u-v}\left[\sum_{p<y}\frac{lp}{p^v}+\sum_{p^2<y}\frac{lp}{p^{2v}}+\cdots\right].$$

Pour ne pas compliquer inutilement les formules, nous écrirons en abrégé

$$\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^{mu}} = \sum_{p<y}\frac{lp}{p^u}+\sum_{p^2<y}\frac{lp}{p^{2u}}+\sum_{p^3<y}\frac{lp}{p^{3u}}+\cdots.$$

Au second membre, les sommes s'étendent respectivement aux nombres premiers $< y$, puis aux nombres premiers dont le carré est $< y$, ... et ainsi de suite jusqu'à ce que les sommes s'annulent d'elles-mêmes.

26. *Comparaison des deux résultats. Formule générale.* — En comparant ce dernier résultat à celui du n° 24, on trouve l'équation

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} y^u\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^{mu}} - y^v\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^{mv}} = &-\left[y^u\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - y^v\frac{\zeta'(v)}{\zeta(v)}\right] \\ &+\frac{u-v}{(u-1)(v-1)}y \\ &-(u-v)\sum_{\rho}\frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)} \\ &-(u-v)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^{-2m}}{(2m+u)(2m+v)}. \end{aligned}\right.$$

Les sommes du premier membre s'étendent à toutes les puissances des nombres premiers qui sont inférieures à y, comme on l'a défini au numéro précédent.

Cette équation a été établie en supposant que y n'était pas une puissance d'un nombre premier. Mais il est facile de s'assurer que cette restriction peut disparaître. Nous allons montrer, en effet, que *les deux membres de l'équation sont des fonctions continues de* y, pour $y > 1$.

Le second membre est une fonction continue de y pour $y > 1$. En effet, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^{-2m}}{(2m+u)(2m+v)}$$

est une série potentielle qui converge très rapidement. D'autre part, la somme étendue aux racines ρ

$$\sum_{\rho} \frac{y^{\rho}}{(u-\rho)(v-\rho)}$$

a tous ses termes inférieurs à ceux de la série

$$y \sum_{\rho} \frac{1}{(u-\rho)(v-\rho)},$$

qui est absolument convergente, parce que la série $\Sigma \frac{1}{\rho^2}$ jouit de cette propriété. Donc la série étendue aux racines ρ qui nous intéresse est uniformément convergente et a pour somme une fonction continue de y. Donc enfin le second membre de l'équation est une fonction continue de y.

Le premier membre de l'équation est aussi une fonction continue de y, car les deux sommes

$$y^u \sum_{p^m < y} \frac{lp}{p^{mu}}, \quad y^v \sum_{p^m < y} \frac{lp}{p^{mv}}$$

présentent les mêmes discontinuités : elles augmentent brusquement l'une et l'autre de lp chaque fois que y passe par une valeur de la forme p^m égale à une puissance entière d'un nombre premier. Donc ces discontinuités se détruisent dans le premier membre de l'équation, qui reste continu pour toute valeur de y.

Voici encore une remarque importante. Les quantités u et v

ont été précédemment assujetties à certaines conditions, mais toute restriction disparaît dans l'équation (7). En effet, le second membre est une fonction uniforme de u et de v dans toute l'étendue du plan et il en est de même du premier membre. Donc l'égalité doit subsister pour toute valeur de u et de v. On remarquera de plus que le premier membre, composé d'un nombre limité de termes, est holomorphe dans toute l'étendue du plan ; donc toutes les discontinuités apparentes du second membre doivent disparaître en se détruisant entre elles. Il conviendra donc, pour les valeurs de u et de v qui rendent discontinus certains termes, de modifier la disposition du second membre de manière à mettre cette circonstance capitale en pleine lumière. C'est ce que nous allons faire dans les cas particuliers qui vont suivre.

27. *Premier cas particulier* : $v = 0$. — Posons $v = 0$ et divisons par y^u, la formule (7) deviendra

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^{mu}} - \frac{1}{y^u}\sum_{p^m<y} lp = &-\left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - \frac{1}{y^u}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right] \\ &+ \frac{u}{1-u}\, y^{1-u} - u\sum_{\rho}\frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)} \\ &- u\sum_{m}\frac{y^{-2m-u}}{2m(2m+u)}. \end{aligned}\right.$$

Il ne faut pas oublier que, d'après son origine (25),

$$\sum_{p^m<y} lp = \sum_{p<y} lp + \sum_{p^2<y} lp + \sum_{p^3<y} lp + \cdots,$$

et les sommes du second membre s'étendent respectivement aux nombres premiers qui sont $< y$, puis à ceux dont le carré est $< y$ et ainsi de suite jusqu'à ce que les sommes s'annulent d'elles-mêmes.

28. *Deuxième cas particulier* : $u = 1$. — Dans la formule (8) du numéro précédent, on peut faire encore tendre u vers l'unité. Mais, pour les raisons indiquées à la fin du n° 26, il convient,

avant de passer à la limite, de modifier la disposition des termes du second membre.

On remarquera les relations suivantes, dont la seconde s'obtient par l'application de la règle de L'Hôpital :

$$\frac{u}{1-u}y^{1-u} = \frac{u}{1-u} + \frac{u}{1-u}(y^{1-u}-1),$$

$$\lim_{u=1} \frac{y^{1-u}-1}{1-u} = ly.$$

En tenant compte de ces relations, l'équation du numéro précédent devient, pour $u=1$,

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m} - \frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp = ly - \lim_{u=1}\left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} + \frac{u}{u-1}\right] + \frac{1}{y}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \\ + \sum_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \sum_{m} \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}. \end{aligned} \right.$$

29. *Remarques sur la formule précédente.* — La formule que nous venons d'obtenir fournit des conséquences asymptotiques remarquables, sur lesquelles nous aurons à revenir. Nous allons dès maintenant en signaler une qui nous sera utile un peu plus loin.

Si l'on fait tendre y vers l'infini, les termes du second membre

$$\frac{1}{y}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \quad \text{et} \quad \sum_{m} \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}$$

tendent très rapidement vers zéro.

D'autre part, comme $\Re(\rho-1) \leqq 0$, la somme $\sum_{\rho}$ de ce second membre converge plus rapidement que la série

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho(\rho-1)},$$

qui est absolument convergente; cette somme a donc une limite supérieure indépendante de y.

Donc, dans le second membre de l'équation, il n'y a qu'un seul terme qui puisse croître indéfiniment avec y, c'est le terme ly.

Dans le premier membre de l'équation, le rapport

$$\frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp$$

conserve toujours une valeur voisine de l'unité, comme l'a montré M. Tchebichef dans un mémoire célèbre (*) et comme on peut d'ailleurs le voir plus facilement (**). Il résulte de là, en divisant toute l'équation par ly, que l'on aura

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m} = 1.$$

Ce résultat est connu depuis longtemps et a déjà été utilisé bien des fois. On peut aussi l'obtenir d'une manière élémentaire.

30. *Troisième cas particulier.* — Cherchons maintenant ce que devient la formule du n° 27, quand on fait tendre u vers un zéro imaginaire simple de $\zeta(s)$ que nous désignerons par ρ_1.

Commençons par isoler de la somme $\sum_\rho$ le terme relatif à ce zéro; ce terme (avec un signe contraire de celui qu'il a dans l'équation) peut se décomposer comme il suit :

$$\frac{uy^{\rho_1-u}}{\rho_1(\rho_1-u)} = \frac{u}{\rho_1(\rho_1-u)} + \frac{uy^{\rho_1-u}-u}{\rho_1(\rho_1-u)}$$

$$= \left(\frac{1}{\rho_1-u} - \frac{1}{\rho_1}\right) + \frac{u}{\rho_1}\,\frac{y^{\rho_1-u}-1}{\rho_1-u}.$$

On remarque encore que l'on a, par la règle de L'Hôpital,

$$\lim_{u=\rho_1} \frac{u}{\rho_1}\,\frac{y^{\rho_1-u}-1}{\rho_1-u} = ly;$$

(*) Mémoire reproduit dans le *Cours d'algèbre supérieure* de SERRET. Voir 3e édit. (1866), t. II, p. 212, formule (8). Le rapport $\frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp$ est représenté dans cet ouvrage par $\psi(y)$.

(**) BACHMANN, *Die analytische Zahlentheorie* (Leipzig, 1894), pp. 361 et suiv.

de sorte que la formule du n° 27 deviendra, pour $u = \rho_1$,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^{m\rho_1}} - \frac{1}{y^{\rho_1}} \sum_{p^m<y} lp = &- ly + \frac{1}{\rho_1} - \lim_{u=\rho_1} \left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - \frac{1}{u-\rho_1}\right] \\ &+ \frac{1}{y^{\rho_1}} \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} \\ &- \rho_1 \sum_{\rho}{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)} - \rho_1 \sum_m \frac{y^{-2m-\rho_1}}{2m(2m+\rho_1)}. \end{aligned}\right.$$

Dans le second membre, nous avons accentué la somme $\sum_{\rho}$ pour rappeler que le terme relatif à ρ_1 en a été éliminé : il faudra se garder d'oublier cette circonstance dans la suite.

31. *Combinaison des deux derniers cas particuliers.* — Si l'on considère la dernière équation, on n'y trouve que des puissances de y, à part un terme unique $-ly$. Mais ce terme perturbateur peut être éliminé, car il se trouve en signe contraire dans l'équation (9) obtenue précédemment pour $u = 1$ (n° 28).

Ajoutons, à cette fin, les deux équations entre elles, en observant que l'on a

$$\lim_{u=1} \left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} + \frac{u}{u-1}\right] = 1 + \lim_{u=0} \left[\frac{\zeta'(1+u)}{\zeta(1+u)} + \frac{1}{u}\right],$$

$$\lim_{u=\rho_1} \left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} - \frac{1}{u-\rho_1}\right] = \lim_{u=0} \left[\frac{\zeta'(\rho_1+u)}{\zeta(\rho_1+u)} - \frac{1}{u}\right];$$

nous trouverons l'équation importante

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{p^m<y} lp\left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m\rho_1}}\right) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p^m<y} lp \\ = \frac{1}{\rho_1} - 1 - \lim_{u=0} \left[\frac{\zeta'(1+u)}{\zeta(1+u)} + \frac{\zeta'(\rho_1+u)}{\zeta(\rho_1+u)}\right] \\ + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} \\ - \sum_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \sum_{\rho}{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)} \\ - \sum_m \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)} - \rho_1 \sum_m \frac{y^{-2m-\rho_1}}{2m(2m+\rho_1)}. \end{aligned}\right.$$

§ 4. — *Forme particulière de la dernière équation dans l'hypothèse (impossible) d'une racine de la forme* $\rho = 1 + \beta i$.

32. *Forme particulière du second membre.* — L'équation 11 du numéro précédent va servir de base à la démonstration de l'impossibilité d'une racine $\rho = 1 + \beta i$. Cette démonstration sera faite au chapitre suivant. Mais l'équation du n° 31 est assez compliquée, et il importe d'en simplifier l'écriture, pour en dégager ce qui sera essentiel à la démonstration.

Supposons, par impossible, qu'il y ait des racines ρ de la forme $1 + \beta i$, et prenons pour ρ_1 l'une d'elles. Posons donc implicitement $\rho_1 = 1 + \beta i$ dans l'équation du n° 31 et examinons, dans cette hypothèse, comment se comporte le second membre quand y augmente indéfiniment.

On trouve dans ce second membre : 1° Une constante finie

$$C = \frac{1}{\rho_1} - 1 - \lim_{u=0} \left[\frac{\zeta'(1+u)}{\zeta(1+u)} + \frac{\zeta'(\rho_1 + u)}{\zeta(\rho_1 + u)} \right];$$

2° Trois termes qui tendent très rapidement vers zéro quand y augmente, savoir :

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_m \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)} - \rho_1 \sum_m \frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+\rho_1)};$$

3° Un terme purement périodique

$$\frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{-\beta i};$$

4° Enfin, deux sommes étendues aux racines ρ qui sont

$$-\sum_\rho \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \sum_\rho{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

Dans ces sommes, les exposants de y ne peuvent pas avoir (pour $\rho_1 = 1 + \beta i$) leur partie réelle plus grande que zéro. Ces

sommes convergent donc plus rapidement, quel que soit y (supposé > 1), que les séries correspondantes

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho(\rho-1)}, \quad \rho_1 \sum_{\rho}{}' \frac{1}{\rho(\rho-\rho_1)},$$

qui sont absolument convergentes et dont les termes ne dépendent pas de y. Ces sommes sont donc *absolument* et *uniformément* convergentes, y variant sans restriction. Nous pouvons, par conséquent, les partager d'abord en deux autres : deux premières sommes que nous désignerons avec une lettre nouvelle $\mathcal{S}$ pour les reconnaître des précédentes,

$$-\mathcal{S}_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}, \quad -\rho_1 \mathcal{S}_{\rho}{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)},$$

étendues à toutes les racines ρ de la forme $1+\beta i$ seulement; deux autres sommes analogues étendues aux autres racines.

Dans ces deux dernières, l'exposant de y aura sa partie réelle négative, et tous les termes tendront sans exception vers zéro quand y tendra vers l'infini. Il en sera de même pour ces sommes elles-mêmes, à cause de l'uniformité de la convergence. Les deux premières sommes, au contraire, seront formées de termes purement périodiques.

En définitive, on peut partager le second membre en trois parties :

Une constante C;

Une partie évanouissante pour y infini : ε;

Une partie formée de termes périodiques : P.

$$P = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} - \mathcal{S}_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \mathcal{S}_{\rho}{}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

L'équation du n° 31 prendra alors la forme

$$(12) \qquad \sum_{p^m<y} lp \left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m\rho_1}}\right) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p^m<y} lp = C + \varepsilon + P.$$

Dans l'expression de P, il ne faut pas perdre de vue que la

somme $\underset{\rho}{S}$ s'étend à toutes les racines ρ de la forme $1 + \beta i$, la somme $\underset{\rho}{S'}$ aux mêmes racines, sauf ρ_1. Si ces deux sommes renferment une infinité de termes, elles seront certainement *absolument* et *uniformément* convergentes, comme les sommes Σ d'où elles sont extraites : c'est là un point essentiel. Nous dirons au chapitre suivant qu'une expression composée comme le second membre de notre équation est une expression de la forme $L + P$, en désignant par L la partie convergente $(C + \varepsilon)$ et par P la partie périodique du développement.

33. *Forme particulière du premier membre.* — Portons notre attention sur le premier membre de l'équation (12) que nous venons d'écrire. On y trouve deux termes que nous allons examiner séparément.

Le premier terme a pour valeur, en développant la somme Σ (voir n° 25 à la fin),

$$\sum_{p<y} lp\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{\rho_1}}\right) + \sum_{p^2<y} lp\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{2\rho_1}}\right) + \sum_{p^3<y} lp\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^{3\rho_1}}\right) + \cdots.$$

Rappelons maintenant que $\rho_1 = 1 + \beta i$ et que, par conséquent, les deux séries

$$\sum \frac{lp}{p^2} + \sum \frac{lp}{p^3} + \cdots = \sum \frac{lp}{p(p-1)},$$

$$\sum \frac{lp}{p^{2\rho_1}} + \sum \frac{lp}{p^{3\rho_1}} + \cdots = \sum \frac{lp}{p^{\rho_1}(p^{\rho_1}-1)},$$

étendues à tous les nombres premiers, sont absolument convergentes ; il en résultera immédiatement que la somme

$$\sum_{p^2<y} lp\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{2\rho_1}}\right) + \sum_{p^3<y} lp\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^{3\rho_1}}\right) + \cdots$$

est une quantité L qui tend vers une limite finie quand y tend vers l'infini, et l'on pourra poser

$$(13) \quad . \quad . \quad . \sum_{p^m<y} lp\left(\frac{1}{p^m} + \frac{1}{p^{m\rho_1}}\right) = \sum_{p<y} lp\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{\rho_1}}\right) + L,$$

la nouvelle somme s'étendant seulement aux nombres premiers $< y$.

Le second terme du premier membre est susceptible d'une réduction analogue. Eu égard à la relation $\rho_1 = 1 + \beta i$, il se met d'abord sous la forme suivante :

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p^m < y} lp = (1 + y^{-\beta i}) \left[\frac{1}{y} \sum_{p < y} lp + \frac{1}{y} \sum_{p^2 < y} lp + \cdots\right].$$

Mais quand y tend vers l'infini, la quantité entre crochets se réduit à son premier terme, car les autres peuvent s'écrire :

$$\sum_{p^2 < y} \left(\frac{p^2}{y}\right) \frac{lp}{p^2} + \sum_{p^3 < y} \left(\frac{p^3}{y}\right) \frac{lp}{p^3} + \cdots$$

Cette somme tend visiblement vers zéro quand y tend vers l'infini, car tous ses termes s'obtiennent en multipliant ceux de la série absolument convergente

$$\sum \frac{lp}{p^2} + \sum \frac{lp}{p^3} + \cdots$$

par des facteurs tous nuls ou plus petits que *un* et qui tendent *tous* vers zéro quand y tend vers l'infini.

En définitive, le second terme de notre équation peut donc s'écrire, le facteur imaginaire $(1 + y^{-\beta i})$ étant essentiellement fini,

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p^m < y} lp = \varepsilon + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p < y} lp,$$

où ε est une quantité évanouissante pour y infini.

34. *Forme définitive de l'équation dont il faut démontrer l'impossibilité.* — Remplaçons dans le premier membre de l'équation finale (12) du n° 32 les deux termes du premier membre par leurs nouvelles expressions (13) et (14), calculées au numéro précédent. Puis faisons passer dans le second membre les con-

stantes et les termes évanouissants pour y infini. L'équation prendra la forme définitive

$$(15) \quad . \quad . \sum_{p<y} lp \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{\rho_1}}\right) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}.$$

Dans cette équation, L est une quantité qui converge vers une limite finie que nous n'avons pas besoin de connaître, et P est une série périodique absolument convergente et qui a pour valeur (32) :

$$(16) \qquad \mathrm{P} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} - \underset{\rho}{\mathrm{S}} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \underset{\rho}{\mathrm{S}'} \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

Le chapitre suivant sera consacré à établir que l'équation (15) renferme une contradiction. Pour cela, nous avons d'abord à établir les propriétés générales des développements de la forme L + P.

CHAPITRE III.

LA FONCTION $\zeta(s)$ N'A PAS DE RACINES DE LA FORME $\rho = 1 + \beta i$.

---

§ 1. — *Propriétés générales des développements de la forme* L + P.

35. Nous allons nous occuper pour le moment des propriétés remarquables de certains développements, propriétés qui vont jouer un rôle essentiel dans la suite du chapitre.

Désignons par $\varphi(y)$ une fonction simple d'une variable réelle y représentable, pour toute valeur de y supérieure à l'unité, par un développement de la forme

$$\varphi(y) = \mathrm{L} + \mathrm{P},$$

où L est une quantité qui tend vers une limite finie A quand y

tend vers l'infini, tandis que P est une série périodique de la forme

$$P = \sum_n \left[a_n \cos(\alpha_n ly) + b_n \sin(\alpha_n ly)\right].$$

Quand P renferme une infinité de termes, on suppose, en outre, que les séries

$$\sum_n \alpha_n, \quad \sum_n b_n$$

sont absolument convergentes et que les coefficients α_n ne tendent pas vers zéro quand n tend vers l'infini.

Cela posé, nous disons que L est la partie convergente du développement, tandis que P en est la partie périodique.

Lorsqu'une fonction $\varphi(y)$ admettra un développement de cette nature, nous dirons que $\varphi(y)$ est une fonction de la forme L + P, et nous écrirons

$$\varphi(y) = L + P.$$

Dans cette relation, les lettres L et P seront uniquement relatives à la *nature* des développements et aucunement aux valeurs particulières de la partie convergente et de chacun des termes de la partie périodique. C'est ainsi que nous écrirons simultanément

$$\varphi(y) = L + P, \quad \psi(y) = L + P,$$

sans exprimer ainsi que $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ soient identiques, mais en désignant par là seulement que $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ admettent des développements de même nature. Cette convention ne donnera lieu à aucune obscurité.

36. Théorème I. — *Si* $\varphi(y) = L + P$ *et si* β *est un nombre quelconque, on aura encore les deux relations*

$$\varphi(y) \sin(\beta ly) = L + P,$$
$$\varphi(y) \cos(\beta ly) = L + P.$$

Démonstration. La démonstration étant la même dans les deux

cas, nous établirons la première relation seulement. Posons l'équation (où tout est déterminé)

$$\varphi(y) = (A + \varepsilon) + \sum_n (a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly).$$

Il peut se présenter deux cas :

1° S'il n'y a pas de terme en $\cos \beta ly$ dans la série, on aura

$$\varphi(y) \cos \beta ly = \varepsilon \cos \beta ly$$
$$+ \left[A \cos \beta ly + \sum_n (a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly) \cos \beta ly \right].$$

Mais à cause des décompositions :

$$2 \cos \alpha_n ly \cos \beta ly = \cos (\alpha_n + \beta) ly + \cos (\alpha_n - \beta) ly,$$
$$2 \sin \alpha_n ly \cos \beta ly = \sin (\alpha_n + \beta) ly + \sin (\alpha_n - \beta) ly,$$

la quantité entre crochets est encore une expression de la forme P. Le premier terme $\varepsilon \cos \beta ly$, téndant vers zéro quand y tend vers l'infini, est de la forme L. Par conséquent, le théorème est démontré.

2° Si le cosinus $\cos \beta ly$ figure dans la série, celle-ci contiendra, après la multiplication par ce cosinus, un seul terme, par exemple

$$b_n \cos^2 \beta ly = \frac{b_n}{2} (1 + \cos 2\beta ly),$$

renfermant le carré d'une ligne trigonométrique. En isolant ce terme, on pourra écrire

$$\varphi(y) \cos \beta ly = \left(\frac{b_n}{2} + \varepsilon \cos \beta ly \right)$$
$$+ \left[\frac{b_n}{2} \cos 2\beta ly + \sum_n{}' (a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly) \cos \beta ly \right],$$

et cette expression est encore de la forme L + P.

On remarquera que le nouveau terme convergent a pour valeur

$$L = \frac{b_n}{2} + \varepsilon \cos \beta l y.$$

Nous aurons besoin de ce résultat tout à l'heure.

37. Théorème II. — *Si* $\varphi(y) = L + P$, *on a aussi*

$$\frac{1}{y}\int \varphi(y)\,dy = L + P.$$

Démonstration. En remplaçant les lignes trigonométriques par des exponentielles imaginaires, on peut mettre $\varphi(y)$ sous la forme

$$\varphi(y) = (A + \varepsilon) + \sum a y^{\alpha i}.$$

La série Σa est absolument convergente par hypothèse; la série $\Sigma a y^{\alpha i}$ l'est donc uniformément. Par suite, l'intégration terme à terme ne peut soulever aucune critique, et il vient, C désignant la constante d'intégration,

$$\frac{1}{y}\int \varphi(y)\,dy = \frac{1}{y}\left(C + \int (A + \varepsilon)\,dy\right) + \sum \frac{a}{\alpha i + 1} y^{\alpha i}.$$

Au second membre, le premier terme tend visiblement vers A quand y tend vers l'infini; d'autre part, la nouvelle série est de même nature que l'ancienne. Le théorème est donc démontré.

38. Théorème III. — *Si* $\varphi(y) = L + P$, *on a*

$$A = \lim_{y=\infty} L = \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\frac{dy}{y}.$$

Démonstration. Écrivons, comme au numéro précédent,

$$\varphi(y) = (A + \varepsilon) + \sum a y^{\alpha i}.$$

On peut intégrer terme à terme comme ci-dessus; donc

$$\int_1^y \varphi(y)\frac{dy}{y} = \int_1^y (A+\varepsilon)\frac{dy}{y} + \sum a \int_1^y y^{\alpha i - 1} dy$$

$$= (A+\varepsilon')ly + \sum a \frac{y^{\alpha i} - 1}{\alpha i}.$$

Comme α ne peut pas tendre vers zéro par hypothèse (35), la série $\Sigma \frac{a}{\alpha}$ est absolument convergente comme Σa. La somme, au second membre de l'équation précédente, conserve donc toujours une valeur finie. D'autre part, ε' tend vers zéro comme ε. Il vient donc à la limite

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\frac{dy}{y} = A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

39. Théorème IV. — *Si* $\varphi(y) = L + P$, *et si la partie périodique* P *renferme un terme tel que*

$$a_n \cos(\alpha_n ly) + b_n \sin(\alpha_n ly),$$

les deux coefficients seront donnés par les relations

$$a_n = 2 \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\cos(\alpha_n ly)\frac{dy}{y},$$

$$b_n = 2 \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \varphi(y)\sin(\alpha_n ly)\frac{dy}{y}.$$

Démonstration. Comme on l'a montré dans la démonstration du théorème I (2°), $\varphi(y)\cos(\alpha_n ly)$ est une fonction de la forme $L + P$, dans laquelle L a pour limite $\frac{1}{2} a_n$. De même $\varphi(y)\sin(\alpha_n ly)$ est une fonction de la forme $L + P$, dans laquelle L a pour limite $\frac{1}{2} b_n$. Le théorème actuel se ramène donc au précédent.

40. Théorème V. — *Si* $\varphi(y) = L + P$, *et si* P *n'a pas de terme en cos* βly (*ou en sin* βly), *on aura*

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{ly} \int_1^y \varphi(y) \cos(\beta ly) \frac{dy}{y} = 0, \quad \text{ou} \quad \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly} \int_1^y \varphi(y) \sin(\beta ly) \frac{dy}{y} = 0.$$

Démonstration. Comme on l'a montré dans la démonstration du théorème I (1°), la fonction $\varphi(y) \cos(\beta ly)$ est une fonction de la forme $L + P$, dans laquelle L a pour limite zéro. La même chose a lieu pour $\varphi(y) \sin(\beta ly)$. Le théorème actuel se ramène donc encore au théorème III.

41. Théorème VI. — *Si la fonction* $\varphi(y)$ *peut être représentée par un développement de la forme* $L + P$, *elle ne peut l'être que d'une seule manière.*

Démonstration. Il s'agit d'établir que si l'on a

$$\varphi(y) = (A + \varepsilon) + \sum (a_n \cos \alpha_n ly + b_n \sin \alpha_n ly)$$

$$= (A' + \varepsilon') + \sum (a'_n \cos \alpha'_n ly + b'_n \sin \alpha'_n ly),$$

les parties convergentes et les parties périodiques des deux développements sont identiques terme pour terme. C'est ce qui a lieu par les théorèmes précédents.

D'une part, $A = A'$ en vertu du théorème III ; d'autre part, les parties périodiques renfermeront les lignes trigonométriques des mêmes arcs avec les mêmes coefficients, en vertu des théorèmes IV et V. C'est là ce qu'exprime l'énoncé du théorème.

42. *Remarques.* — Les théorèmes précédents vont servir à démontrer que $\zeta(s)$ n'a pas de racines de la forme $1 + \beta i$. On peut déjà prévoir comment ce résultat sera atteint. Nous montrerons que l'hypothèse d'une racine $\rho = 1 + \beta i$ conduit à exprimer une même fonction de deux manières différentes par un développement de la forme $L + P$. Ce résultat, contredisant les théorèmes précédents, doit faire rejeter l'hypothèse initiale.

Naturellement, l'équation qui va servir de point de départ est

celle du n° 34. Celle-ci en contient en réalité deux distinctes par la séparation des parties réelles et imaginaires. On obtient de cette manière deux développements de la nature de ceux que nous venons d'étudier, savoir (puisque $\rho_1 = 1 + \beta i$) :

$$(1) \quad \begin{cases} \sum\limits_{p<y} \frac{lp}{p}(1+\cos\beta lp) - \frac{1+\cos\beta ly}{y}\sum\limits_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}, \\ \sum\limits_{p<y} \frac{lp}{p}\sin\beta lp - \frac{\sin\beta ly}{y}\sum\limits_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}. \end{cases}$$

Les valeurs définies des parties périodiques **P** s'obtiennent facilement et nous en aurons besoin plus tard. Mais nous allons commencer par déduire des équations précédentes deux conséquences fondamentales qui tiennent à la nature seule des développements et vont permettre de simplifier davantage encore ces deux équations. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

§ 2. — *Deux conséquences des équations* (1) *du paragraphe précédent.*

43. Première conséquence. — *La somme étendue aux nombres premiers* $<$ y

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1+\cos\beta lp)$$

converge vers une limite finie quand y *tend vers l'infini.*

Démonstration. Remarquons que $(1 + \cos\beta lp)$ ne peut être négatif; que dès lors la somme $\sum\limits_{p<y}$ de l'énoncé croît sans cesse avec y; donc, de deux choses l'une : ou bien cette somme tendra vers l'infini avec y, ou bien elle convergera vers une limite finie quand y tendra vers l'infini. Mais l'équation

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1+\cos\beta lp) - \frac{1+\cos\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}$$

prouve que cette somme ne peut pas croître indéfiniment, car

L et P sont finis par leur nature même, et le rapport $\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp$ conserve toujours une valeur voisine de l'unité, comme l'a montré M. Tchebichef (n° 29). Donc la somme en question doit être convergente.

44. Corollaire I. — *Si l'on partage les nombres premiers en deux classes, les nombres* p_1 *pour lesquels*

$$1 + \cos \beta l p_1 > \varepsilon,$$

et les nombres p_2 *pour lesquels*

$$1 + \cos \beta l p_2 < \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, *la somme*

$$\sum_{p_1<y} \frac{l p_1}{p_1}$$

composée des seuls nombres premiers p_1 *convergera vers une limite finie quand on fera croître* y *indéfiniment.*

Démonstration. Tous les termes étant positifs, il suffit de montrer que la somme ne peut pas croître indéfiniment. Pour cela on remarque l'inégalité évidente

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta l p) > \sum_{p_1<y} \frac{l p_1}{p_1}(1 + \cos \beta l p_1),$$

parce que le premier membre renferme tous les termes du second plus d'autres termes positifs. Mais on a dans cette inégalité $(1 + \cos \beta l p_1) > \varepsilon$; on en tire donc

$$\sum_{p_1<y} \frac{l p_1}{p_1} < \frac{1}{\varepsilon} \sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta l p),$$

et, comme le second membre a une valeur finie pour y infini quelque petit que soit ε, le théorème est établi.

45. Corollaire II. — *Si l'on fait tendre* y *vers l'infini, on a*

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{y} \sum_{p<y} lp(1 + \cos \beta lp) = 0.$$

Démonstration. Si l'on met l'expression ci-dessus sous la forme suivante :

$$\sum_{p<y} \left(\frac{p}{y}\right) \frac{lp}{p} (1 + \cos \beta lp),$$

on reconnaît que tous ses termes s'obtiennent en multipliant les termes correspondants de la série convergente à termes positifs

$$\sum \frac{lp}{p} (1 + \cos \beta lp),$$

étendue à tous les nombres premiers, par des facteurs nuls ou de la forme $\left(\frac{p}{y}\right)$ qui sont tous plus petits que *un*, et qui tendent tous vers zéro quand y tend vers l'infini. Donc cette somme tend vers zéro quand y tend vers l'infini.

46. Corollaire III. — *Si* y *tend vers l'infini, on a aussi*

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{y} \sum_{p<y} lp \mid \sin \beta lp \mid = 0.$$

Démonstration. Soit ε un nombre positif arbitrairement petit et décomposons la somme précédente en deux autres : l'une relative aux nombres premiers p_1 pour lesquels

$$1 + \cos \beta lp_1 > \varepsilon,$$

l'autre aux nombres p_2 pour lesquels

$$1 + \cos \beta lp_2 < \varepsilon.$$

On aura

$$\frac{1}{y} \sum_{p<y} lp \mid \sin \beta lp \mid = \frac{1}{y} \sum_{p_1<y} lp_1 \mid \sin \beta lp_1 \mid + \frac{1}{y} \sum_{p_2<y} lp_2 \mid \sin \beta lp_2 \mid .$$

Dans le second membre, le premier terme peut se mettre sous la forme

$$\sum_{p_1<y} \left| \frac{p_1 \sin \beta l p_1}{y} \right| \frac{l p_1}{p_1},$$

et il tendra vers zéro quand y tendra vers l'infini, car tous ses termes s'obtiennent en multipliant ceux de la série convergente à termes positifs (corollaire I)

$$\sum \frac{l p_1}{p_1}$$

par des facteurs nuls ou de la forme $\left|\frac{p_1 \sin \beta l p_1}{y}\right|$ qui sont tous plus petits que *un* et tendent tous vers zéro quand y tend vers l'infini.

Enfin, dans le second terme, on a

$$| \sin \beta l p_2 | = \sqrt{1 + \cos \beta l p_2} \sqrt{1 - \cos \beta l p_2} < \sqrt{2\varepsilon},$$

et, par conséquent, ce second terme vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{y} \sum_{p_2<y} l p_2 \, | \sin \beta l p_2 | < \sqrt{2\varepsilon} \, \frac{1}{y} \sum_{p_2<y} l p_2.$$

D'ailleurs, comme nous le savons, le rapport $\frac{1}{y} \sum_{p_2<y} l p_2$ ne peut pas surpasser une limite voisine de l'unité. Donc ce second terme est aussi petit que l'on veut avec ε.

Il résulte de là que l'expression

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{y} \sum_{p<y} l p \; | \sin \beta l p |$$

est aussi petite que l'on veut avec ε, et est, par conséquent, rigoureusement nulle.

47. Corollaire IV. — *Si* y *tend vers l'infini, on a*

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{l y} \sum_{p<y} \frac{l p}{p} \, | \sin \beta l p | = 0.$$

Démonstration. Décomposons les nombres premiers dans les deux mêmes classes p_1 et p_2 qu'au numéro précédent. On a

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \mid \sin \beta lp \mid < \sum_{p_1<y} \frac{lp_1}{p_1} + \sum_{p_2<y} \frac{lp_2}{p_2} \mid \sin \beta lp_2 \mid .$$

Quand y tend vers l'infini, la première somme du second membre tend vers une limite finie (corollaire I), donc le quotient de cette somme par ly aura pour limite zéro. En ce qui concerne la seconde somme, on peut poser les inégalités

$$\frac{1}{ly} \sum_{p_2<y} \frac{lp_2}{p_2} \mid \sin \beta lp_2 \mid < \sqrt{2\varepsilon} \frac{1}{ly} \sum_{p_2<y} \frac{lp_2}{p_2} < \sqrt{2\varepsilon} \frac{1}{ly} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m}.$$

Donc ce quotient est aussi petit que l'on veut avec ε, car nous avons démontré au n° 29 que le rapport $\frac{1}{ly} \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m}$ a pour limite l'unité.

En résumé donc, le rapport dont il est question dans l'énoncé du corollaire décroît au-dessous de toute limite donnée $\sqrt{2\varepsilon}$ et a par conséquent pour limite zéro.

48. Deuxième conséquence. — *La somme étendue aux nombres premiers* $<$ y

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp$$

tend vers une limite déterminée quand y *tend vers l'infini.*

Démonstration. Il ne sera pas inutile de remarquer que cette deuxième conséquence est moins apparente que la première et que l'on ne peut plus établir que la convergence soit absolue. La convergence n'a lieu que quand les termes s'introduisent dans l'ordre indiqué, c'est-à-dire dans l'ordre des nombres premiers. Il est bien vrai sans doute que $\sin \beta lp$ est infiniment petit en même temps que $1 + \cos \beta lp$, mais il est infiniment petit de

l'ordre de $\sqrt{1 + \cos \beta lp}$ seulement et l'ordre de décroissance des termes des deux sommes

$$\sum \frac{lp}{p} \sin \beta lp \quad \text{et} \quad \sum \frac{lp}{p} (1 + \cos \beta lp)$$

n'est pas le même.

Pour démontrer le théorème, nous devons avoir de nouveau recours aux équations (1) du n° 42. On peut déjà, dans la première, faire passer du premier au second membre le terme

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p} (1 + \cos \beta lp)$$

qui est convergent et peut être compris dans la partie L du second membre. Les équations (1) deviennent alors plus simplement, en changeant les signes,

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \dfrac{1 + \cos \beta ly}{y} \displaystyle\sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}, \\ \dfrac{\sin \beta ly}{y} \displaystyle\sum_{p<y} lp - \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}. \end{cases}$$

Nous commencerons par déduire de ces deux équations que la somme $\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp$ doit admettre un développement de la forme L + P.

Appliquons, à cet effet, le théorème II du paragraphe précédent, il viendra en intégrant la seconde équation

$$(3) \quad \frac{1}{y} \int_1^y dy \left[\frac{\sin \beta ly}{y} \sum_{p<y} lp \right] - \frac{1}{y} \int_1^y dy \left[\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp \right] = \mathrm{L} + \mathrm{P}.$$

Nous allons calculer successivement ces deux intégrales et nous commencerons par la première. On a par décomposition

$$\int_1^y dy \left[\frac{\sin \beta ly}{y} \sum_{p<y} lp \right] = \sum_{p<y} lp \int_p^y \frac{\sin \beta ly}{y} dy.$$

On remarque, en effet, que dans le second membre la limite inférieure de l'intégrale qui multiplie lp doit être p, car le terme qui renferme lp ne s'introduit dans la somme qu'à partir de la valeur $y = p$. En effectuant les intégrations, on trouve donc

$$\int_1^y dy \left[\frac{\sin \beta ly}{y} \sum_{p<y} lp\right] = -\frac{1}{\beta} \sum_{p<y} lp(\cos \beta ly - \cos \beta lp)$$

$$= -\frac{1 + \cos \beta ly}{\beta} \sum_{p<y} lp + \frac{1}{\beta} \sum_{p<y} lp(1 + \cos \beta lp).$$

Si l'on divise par y, il vient par le corollaire II (n° 45)

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{\beta y} \sum_{p<y} lp(1 + \cos \beta lp) = 0.$$

On a donc une relation de la forme

$$(4) \qquad \frac{1}{y} \int_1^y dy \left[\frac{\sin \beta ly}{y} \sum_{p<y} lp\right] = -\frac{1 + \cos \beta ly}{\beta y} \sum_{p<y} lp + \mathrm{L},$$

le terme convergent L tendant ici vers zéro quand y tend vers l'infini.

Mais si l'on remonte à la première des équations (2) du numéro actuel, on voit qu'elle exprime que le premier terme du second membre de l'équation (4) est de la forme L + P. Par suite l'équation (4) est aussi de la forme

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{y} \int_1^y dy \left[\frac{\sin \beta ly}{y} \sum_{p<y} lp\right] = \mathrm{L} + \mathrm{P}.$$

Passons à la seconde intégrale de l'équation (3). On a comme ci-dessus

$$\int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \sum_{p<y} \left[\frac{lp}{p} \sin \beta lp \int_p^y dy\right],$$

$$\frac{1}{y} \int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp - \frac{1}{y} \sum_{p<y} lp \sin \beta lp.$$

Mais le dernier terme de cette équation tend vers zéro pour y infini en vertu du corollaire III (n° 46), il est donc de la forme L, et l'équation elle-même prend la forme

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{y}\int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp + \mathrm{L}.$$

Remplaçons dans l'équation (3) les intégrales par leurs valeurs (5) et (6) et faisons passer au second membre les termes des types L et P; il vient un résultat de la forme

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \mathrm{L} + \mathrm{P}.$$

C'est le premier point que nous voulions établir. La démonstration s'achève maintenant facilement. Je dis que la partie périodique P doit être identiquement nulle.

Supposons, en effet, qu'elle renferme un terme tel que

$$a \sin \alpha ly.$$

Le coefficient a sera donné par la formule (théor. IV, n° 39)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} a &= \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly}\int_1^y \frac{dy}{y}\left[\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp\right] \sin \alpha ly \\
&= \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly} \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp \int_p^y \frac{\sin \alpha ly}{y} dy \\
&= -\lim_{y=\infty} \frac{1}{\alpha ly} \sum_{p<y} \left[\frac{lp}{p} (\cos \alpha ly - \cos \alpha lp) \sin \beta lp\right].
\end{aligned}$$

On en conclut

$$\frac{1}{2} \bmod a < \frac{2}{\alpha} \lim_{y=\infty} \frac{1}{ly} \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \mid \sin \beta lp \mid,$$

et par conséquent a est nul en vertu du corollaire IV (n° 47).

On prouverait exactement de même que P ne peut pas renfermer de cosinus et par conséquent l'équation (7) doit se réduire à

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp = \mathrm{L}.$$

C'est la seconde conséquence qu'il s'agissait d'établir.

§ 3. — *Simplification définitive de l'équation du n° 34 et contradiction qui en résulte.*

49. Nous venons de démontrer dans le précédent paragraphe que les deux sommes

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta lp) \quad \text{et} \quad \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp$$

convergent vers des limites finies quand y tend vers l'infini. Il en sera de même pour la somme algébrique

$$\sum_{p<y} lp \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{\rho_1}}\right) = \sum_{p<y} \frac{lp}{p}(1 + \cos \beta lp) - i \sum_{p<y} \frac{lp}{p} \sin \beta lp.$$

Donc, si nous nous reportons à l'équation (15) du n° 34, nous reconnaîtrons qu'il est permis de faire passer du premier au second membre le premier terme qui est de la forme L. On obtient ainsi, en changeant les signes,

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{\rho_1}}\right) \sum_{p<y} lp = \mathrm{L} + \mathrm{P},$$

et P, ayant changé de signe, a pour valeur (34) (form. 16)

$$\mathrm{P} = -\frac{\rho_1}{1-\rho_1} y^{1-\rho_1} + \underset{\rho}{\mathrm{S}} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} + \rho_1 \underset{\rho}{\mathrm{S}}' \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

Dans l'équation (8) on peut égaler séparément les parties

réelles et imaginaires. Mais afin d'éviter d'écrire des termes inutiles, nous remarquerons dès maintenant que la somme

$$\mathop{\mathcal{S}}_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}$$

est réelle, parce que les racines ρ sont conjuguées deux à deux (n° 3).

50. Pour simplifier l'écriture, désignons avec les lettres $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{J}$ respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une quantité complexe, c'est-à-dire que l'on aura, u et v étant réels,

$$\mathfrak{R}(u+iv)=u, \quad \mathfrak{J}(u+iv)=v.$$

Cela posé, égalons séparément les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation (8), il viendra, eu égard à la remarque finale du numéro précédent,

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{1+\cos\beta ly}{y}\displaystyle\sum_{p<y} lp = \mathfrak{R}\left[\mathrm{L}-\dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}y^{1-\rho_1}+\mathop{\mathcal{S}}_{\rho}\dfrac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}+\rho_1\mathop{\mathcal{S}'}_{\rho}\dfrac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}\right] \\ -\dfrac{\sin\beta ly}{y}\displaystyle\sum_{p<y} lp = \mathfrak{J}\left[\mathrm{L}-\dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}y^{1-\rho_1}+\rho_1\mathop{\mathcal{S}'}_{\rho}\dfrac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}\right]. \end{cases}$$

Les termes $\mathfrak{R}\mathrm{L}$ et $\mathfrak{J}\mathrm{L}$ sont les parties convergentes des deux développements. Leur valeur peut se calculer, mais il est inutile de les connaître.

Je vais maintenant démontrer que les deux équations (9) sont en contradiction l'une avec l'autre.

Pour cela, multiplions la seconde équation par dy et intégrons, en remarquant que par rapport à la variable réelle y on peut intégrer sous le signe $\mathfrak{J}$; puis divisons encore toute l'équation par y. Il viendra, en désignant par L' une nouvelle quantité convergente quand y tend vers l'infini,

$$-\frac{1}{y}\int_1^y dy\left[\frac{\sin\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp\right]$$

$$=\mathfrak{J}\left[\mathrm{L}'-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)(2-\rho_1)}y^{1-\rho_1}+\rho_1\mathop{\mathcal{S}'}_{\rho}\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1+1)}\right].$$

Mais nous avons déjà calculé au paragraphe précédent (n° 48, form. 4) l'intégrale du premier membre. Nous avons trouvé (page 54)

$$-\frac{1}{y}\int_1^y dy\left[\frac{\sin\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp\right]=\frac{1+\cos\beta ly}{\beta y}\sum_{p<y} lp+\mathrm{L}.$$

Remplaçons donc l'intégrale par sa valeur et multiplions l'équation par β, nous trouverons, en désignant par L″ une nouvelle quantité convergente pour y infini,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1+\cos\beta ly}{y}\sum_{p<y} lp \\ &=\beta\mathfrak{J}\left[\mathrm{L}''-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)(2-\rho_1)}y^{1-\rho_1}+\rho_1\mathop{\mathcal{S}'}_{\rho}\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1+1)}\right].\end{aligned}\right.$$

En vertu du théorème VI (n° 41), ce nouveau développement doit être identique à celui que fournit le second membre de la première équation (9). Or c'est ce qui est impossible, comme nous allons le montrer.

Identifions, en effet, les deux parties périodiques. Il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{R}\left[-\frac{\rho_1}{1-\rho_1}y^{1-\rho_1}+\mathop{\mathcal{S}}_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}+\rho_1\mathop{\mathcal{S}}_{\rho}\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}\right] \\ &=\beta\mathfrak{J}\left[-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)(2-\rho_1)}y^{1-\rho_1}+\rho_1\mathop{\mathcal{S}'}_{\rho}\frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1+1)}\right].\end{aligned}\right.$$

Les deux membres, toutes réductions faites, doivent être composés des lignes trigonométriques des mêmes arcs affectées des mêmes coefficients. Cette identité de composition est la seule chose qui nous intéresse pour le moment. Elle doit persister si l'on différentie les deux membres par rapport à y, sans qu'il y ait lieu de se demander si les sommes restent ou ne restent pas convergentes. Multiplions donc l'équation (11) qui précède par y, différentions-la deux fois de suite et multiplions-la ensuite par y.

Il viendra, sans calcul, si l'on remarque que ces opérations se font sous les signes $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{J}$,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{R}\left[-(2-\rho_1)\rho_1 y^{1-\rho_1} + \underset{\rho}{S} y^{\rho-1} + \rho_1 \underset{\rho}{S}' \frac{\rho-\rho_1+1}{\rho} y^{\rho-\rho_1}\right] \\ &\qquad = \beta\mathfrak{J}\left[-\rho_1 y^{1-\rho_1} + \underset{\rho}{S}' \frac{\rho_1}{\rho} y^{\rho-\rho_1}\right]. \end{aligned}\right.$$

Je dis d'abord que l'identité est impossible si ρ prend une infinité (*) de valeurs dans cette relation. Comparons, en effet, dans cette hypothèse, les cosinus qui figurent dans les deux membres. Dans le premier membre, les cosinus de la première somme $\underset{\rho}{S} y^{\rho-1}$ ont tous pour coefficients $+1$; les coefficients des cosinus réels de la seconde somme tendent visiblement vers ce même nombre $+1$ quand ρ croît indéfiniment, comme le montre la décomposition

$$\rho_1 \frac{\rho-\rho_1+1}{\rho} y^{\rho-\rho_1} = (1+\beta i) y^{\rho-\rho_1} + \frac{\rho_1(1-\rho_1)}{\rho} y^{\rho-\rho_1},$$

dans laquelle le second terme est évanouissant. Par conséquent, le premier membre renferme une infinité de cosinus avec des coefficients finis. Dans le second membre, au contraire, tous les coefficients tendent vers zéro quand ρ croît indéfiniment. L'égalité des coefficients devient donc impossible à partir d'un certain rang. Il ne peut y avoir, par conséquent, qu'un nombre limité de valeurs de ρ.

Mais j'ajoute, d'autre part, qu'il est également impossible que ρ ne prenne qu'un nombre limité de valeurs. En effet, dans ce cas, je choisirais pour ρ_1 la racine $1+\beta i$ dans laquelle β a la plus grande valeur possible. Cela posé, il y aura dans la somme $\underset{\rho}{S}'$ de chacun des deux membres de l'équation (12) un terme qui existera toujours et ne peut se réduire avec aucun autre du même membre. C'est celui dans lequel $\rho = 1-\beta i$ est

(*) Il ne faut pas oublier que ρ représente successivement dans les sommes $\underset{\rho}{S}$ toutes les racines de la forme $1+\beta i$, et celles-là seulement. (Voir n° 32.)

le conjugué de ρ_1, car $\rho - \rho_1$ a, dans ce terme, une valeur $\rho - \rho_1 = -2\beta i$ qui n'est atteinte dans aucun autre. On doit donc avoir identiquement, pour $\rho_1 = 1 + \beta i$, $\rho = 1 - \beta i$,

$$\mathfrak{R}(\rho - \rho_1 + 1)\frac{\rho_1}{\rho} y^{\rho-\rho_1} = \beta \mathfrak{J} \frac{\rho_1}{\rho} y^{\rho-\rho_1}.$$

Cette identité se réduit, pour $y = 1$, à

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{R}(1 - 2\beta i)\frac{1 + \beta i}{1 - \beta i} = \beta \mathfrak{J} \frac{1 + \beta i}{1 - \beta i}.$$

Mais, comme on a

$$1 - 2\beta i = (1 - \beta i) - \beta i,$$

la dernière identité (13) se transforme encore dans la suivante

$$\mathfrak{R}(1 + \beta i) - \beta \mathfrak{R} i \frac{1 + \beta i}{1 - \beta i} = \beta \mathfrak{J} \frac{1 + \beta i}{1 - \beta i}.$$

Enfin, par la relation $\mathfrak{R}(u + iv)i = -\mathfrak{J}(u + iv)$, on trouve

$$\mathfrak{R}(1 + \beta i) = 0,$$

ce qui est absurde. Donc l'hypothèse qui nous a conduit à cette contradiction doit être rejetée, et nous pouvons énoncer ce théorème important :

51. Théorème. — *La fonction $\zeta(s)$ n'a pas de racines de la forme $1 + \beta i$ et par conséquent toutes les racines de $\zeta(s)$ sans exception ont leur partie réelle plus petite que l'unité.*

CHAPITRE IV.

Conséquences asymptotiques relatives a la théorie des nombres premiers.

§ 1. — *Expression asymptotique de l'équation fondamentale du n° 28.*

52. Revenons, maintenant que nous sommes en possession de connaissances nouvelles, à l'équation du n° 28,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^m}-\frac{1}{y}\sum_{p^m<y}lp = ly-\lim_{u=1}\left[\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}+\frac{u}{u-1}\right] \\ +\frac{1}{y}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} \\ -\sum_{m}\frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait tendre y vers l'infini, ainsi que nous l'avons déjà remarqué pour la seconde, les deux sommes

$$\sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)},\quad \sum_{m}\frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}$$

convergent vers zéro. La chose est claire pour la seconde, mais elle est aussi rigoureusement vraie pour la première, car dans tous les termes sans exception $\rho-1$ a sa partie réelle négative, donc tous les termes convergent vers zéro, et comme la série converge uniformément, la somme de la série doit aussi tendre vers zéro. Il est bien certain que la série converge uniformé-

ment, car elle a tous ses termes moindres que la série absolument convergente

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho(\rho-1)},$$

dont les termes ne dépendent plus de y.

Il est utile toutefois de remarquer que nous ne sommes pas en état d'apprécier avec quelle rapidité la somme

$$\sum_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}$$

converge vers zéro quand y tend vers l'infini. Il peut se faire que cette somme converge vers zéro moins rapidement qu'aucune puissance négative de y. C'est ce qui arriverait si les racines de $\zeta(s)$ se rapprochaient indéfiniment de la droite $x = 1$ pour des valeurs indéfiniment croissantes de leur module. Or il n'est pas démontré jusqu'à présent qu'il en soit autrement.

Quoi qu'il en soit, en désignant par ε une quantité qui tend vers zéro quand y augmente indéfiniment, nous pouvons mettre l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m} - \frac{1}{y} \sum_{p^m<y} lp = ly - 1 - \lim_{s=1} \left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right] + \varepsilon,$$

et le second membre nous fournit la valeur asymptotique du premier quand y augmente indéfiniment.

53. Cette équation (2) peut d'ailleurs se simplifier. En effet, la différence

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \sum_{p^m<y} \frac{lp}{p^m} = \sum_{p<y} \frac{lp}{p^2} - \sum_{p^2<y} \frac{lp}{p^2} + \sum_{p<y} \frac{lp}{p^3} - \sum_{p^3<y} \frac{lp}{p^3} + \cdots$$

tend visiblement vers zéro quand y tend vers l'infini.

De même la différence

$$\frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = \sum_{p^2<y}\left(\frac{p^2}{y}\right)\frac{lp}{p^2} + \sum_{p^3<y}\left(\frac{p^3}{y}\right)\frac{lp}{p^3} + \cdots$$

tend, par un raisonnement connu (33), vers zéro quand y tend vers l'infini.

L'équation (2) peut donc s'écrire (en remarquant : $\frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1$)

$$(3) \qquad \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = ly - 1 - \lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right] + \varepsilon.$$

Les nouvelles sommes sont simplement étendues maintenant aux nombres premiers $< y$, et ε tend toujours vers zéro pour y infini.

54. Nous allons encore montrer que la constante, indiquée sous forme de limite dans l'équation (3),

$$\lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right] = C,$$

n'est autre chose que la constante d'Euler.

On a, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{2}{2^s}}\left(1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots\right),$$

d'où en égalant les dérivées logarithmiques

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\frac{l2}{2^s} - \frac{l3}{3^s} + \cdots}{1 - \frac{1}{2^s} + \cdots} - \frac{2l2}{2^s - 2}.$$

On tire de là

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right] &= \frac{\frac{l2}{2}-\frac{l3}{3}+\frac{l4}{4}-\cdots}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots} \\ &\quad + \lim_{s=1}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{2l2}{2^s-1}\right]. \end{aligned}\right.$$

Le dernier terme se calcule aisément par la règle de L'Hôpital. On a, pour $s=1$,

$$\frac{2^s-1-(s-1)2l2}{(s-1)(2^s-1)}=\frac{2^s l2-2l2}{2^s-1+(s-1)2^s l2}$$

$$=\frac{2^s(l2)^2}{2^s l2+2^s l2+(s-1)2^s(l2)^2}=\frac{l2}{2}.$$

On peut aussi calculer le premier terme. On a d'abord au dénominateur

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=l2.$$

Pour calculer le numérateur, posons l'identité

$$1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}\cdots-\frac{1}{(2n)^s}=\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\sum_1^n\frac{1}{n^s}+\sum_{n+1}^{2n}\frac{1}{n^s}.$$

Il vient, en différentiant,

$$\frac{l2}{2^s}-\frac{l3}{3^s}+\frac{l4}{4^s}-\cdots+\frac{l2n}{(2n)^s}=\frac{2l2}{2^s}\sum_1^n\frac{1}{n^s}-\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\sum_1^n\frac{ln}{n^s}$$
$$-\sum_{n+1}^{2n}\frac{ln}{n^s}.$$

Faisons $s=1$ dans cette relation, nous trouverons l'équation

$$\frac{l2}{2}-\frac{l3}{3}+\frac{l4}{4}\cdots+\frac{l2n}{2n}=l2\sum_1^n\frac{1}{n}-\sum_{n+1}^{2n}\frac{ln}{n}.$$

Soit C la constante d'Euler, on a les équations asymptotiques pour n infiniment grand

$$\sum_1^n \frac{1}{n} = ln + C$$

$$\sum_{n+1}^{2n} \frac{ln}{n} = \int_n^{2n} \frac{lx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left[(lx)^2\right]_n^{2n} = lnl2 + \frac{(l2)^2}{2},$$

et en substituant ces valeurs au second membre de l'équation précédente, on trouve

$$\frac{l2}{2} - \frac{l3}{3} + \frac{l4}{4} - \cdots = Cl2 - \frac{(l2)^2}{2}.$$

Tout est maintenant calculé dans le second membre de l'équation (4), et cette équation nous donne

$$\lim_{s=1}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right] = \frac{Cl2 - \frac{1}{2}(l2)^2}{l2} + \frac{l2}{2} = C,$$

comme nous l'avions annoncé.

En conséquence, l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = ly - C - 1 + \varepsilon.$$

§ 2. — *Conséquences asymptotiques de cette équation.*

55. Reprenons l'équation (5), où C est la constante d'Euler,

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = ly - C - 1 + \varepsilon,$$

multiplions-la par dy, puis intégrons les deux membres et divisons par y, on aura, en désignant par ε' une quantité qui tend vers zéro comme ε quand y tend vers l'infini,

$$(6) \quad \frac{1}{y}\int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\int_1^y \frac{dy}{y}\sum_{p<y} lp = \frac{1}{y}\int_1^y ly\,dy - C - 1 + \varepsilon'.$$

Calculons la première de ces intégrales, on trouve

$$\frac{1}{y}\int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} = \frac{1}{y}\sum_{p<y} \frac{lp}{p-1}\int_p^y dy = \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} \frac{p}{p-1}\, lp$$

$$= \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} - \frac{1}{y}\sum_{p<y} lp + \frac{1}{y}\sum_{p<y} \frac{lp}{p-1}.$$

On remarque que $\sum_{p<y} \frac{lp}{p-1}$ étant de l'ordre de ly à cause de l'équation (5), le dernier terme $\frac{1}{y}\sum_{p<y} \frac{lp}{p-1}$ tend vers zéro quand y croît indéfiniment. D'autre part, les deux termes précédents sont ceux du premier membre de l'équation (5); en leur substituant leur valeur donnée par cette équation, on trouve donc

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{y}\int_1^y dy \sum_{p<y} \frac{lp}{p-1} = ly - C - 1 + \varepsilon.$$

L'intégrale du second membre de l'équation (6) se calcule aussi sans difficulté :

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{y}\int_1^y lydy = \frac{1}{y}\left[y(ly-1)\right]_1^y = ly - 1 + \frac{1}{y}.$$

L'équation (6) se réduira donc, en substituant ces valeurs (7) et (8), en supprimant les termes communs dans les deux membres et en changeant les signes, à la suivante :

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{y}\int_1^y \frac{dy}{y} \sum_{p<y} lp = 1 + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro quand y tend vers l'infini.

56. Nous allons déduire maintenant de l'équation (9) que le rapport

$$\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp$$

tend vers l'unité quand y tend vers l'infini.

En changeant, pour plus de clarté, la variable d'intégration, l'équation (9) peut s'écrire

$$\int_1^y \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = (1 + \varepsilon) y.$$

Soit k un nombre positif donné, indépendant de y et arbitrairement petit. Changeons y en $(1 + k) y$ dans l'équation précédente, et désignons par ε' une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini, on aura

$$\int_1^{(1+k)y} \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = (1 + \varepsilon')(1 + k) y.$$

On soustrait de cette équation celle qui la précède et l'on trouve

$$\int_y^{(1+k)y} \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = ky + \varepsilon y + \varepsilon'(1 + k) y,$$

et en divisant par ky

$$\frac{1}{ky} \int_y^{(1+k)y} \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = 1 + \frac{\varepsilon + \varepsilon'(1 + k)}{k}.$$

Faisons maintenant tendre y vers l'infini, ε et ε' tendent vers zéro, et il vient, quelque petit que soit k,

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{ky} \int_y^{(1+k)y} \frac{dx}{x} \sum_{p<x} lp = 1.$$

Remarquons que la fonction $\sum_{p<x} lp$ est constamment constante ou croissante sous le signe d'intégration et que l'on a, par suite,

les inégalités

$$\frac{1}{ky}\int_y^{(1+k)y}\frac{dx}{x}\sum_{p<x} lp \geqq \frac{1}{ky}\sum_{p<y} lp\int_y^{(1+k)y}\frac{dx}{x} \geqq \frac{l(1+k)}{ky}\sum_{p<y} lp,$$

$$\frac{1}{ky}\int_y^{(1+k)y}\frac{dx}{x}\sum_{p<x} lp \leqq \frac{1}{ky}\sum_{(p<(1+k)y)} lp\int_y^{(1+k)y}\frac{dx}{x} \leqq \frac{l(1+k)}{ky}\sum_{p<(1+k)y} lp.$$

Par conséquent, si l'on fait tendre y vers l'infini, on aura, sans présupposer l'existence d'une limite déterminée (les inégalités pouvant n'être que des limites d'indétermination),

$$\lim_{y=\infty}\frac{l(1+k)}{ky}\sum_{p<y} lp \leqq 1,$$

$$\lim_{y=\infty}\frac{(1+k)\,l(1+k)}{k(1+k)\,y}\sum_{p<(1+k)y} lp \geqq 1.$$

D'ailleurs on peut changer y en $\frac{y}{1+k}$ dans la seconde inégalité et l'on trouve, par la combinaison des deux inégalités,

$$\frac{k}{l(1+k)} \geqq \lim_{y=\infty}\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp \geqq \frac{k}{(1+k)l(1+k)}.$$

Dans ces relations, k est aussi petit que l'on veut; on peut le faire tendre vers zéro, et les deux membres extrêmes tendent alors vers l'unité. On a par conséquent

$$\lim_{y=\infty}\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp = 1,$$

et l'existence de la limite est en même temps démontrée.

Nous pouvons donc énoncer le théorème important dont la démonstration rigoureuse n'avait pas encore été obtenue jusqu'à présent (*) :

(*) Le résultat a été affirmé sans démonstration par M. Stieltjes. — M. Cahen a essayé de l'établir dans sa *Thèse* de 1894, mais il y a une lacune dans sa démonstration. M. Cahen affirme (au bas de la page 44) la convergence d'une série dont tous les termes s'obtiennent en intégrant tous les termes d'une série convergente entre des limites infinies. La convergence de cette série ne repose sur rien et serait beaucoup plus difficile à démontrer que le théorème que M. Cahen veut établir.

Théorème. — *La somme des logarithmes naturels des nombres premiers inférieurs à* y *est asymptotique à* y *quand* y *tend vers l'infini.*

Ce théorème en donne immédiatement un autre, déjà énoncé mais non démontré jusqu'à présent.

Théorème. — *Quelque petit que soit* k, *le nombre des nombres premiers compris entre* y *et* $(1 + k)y$ *augmente indéfiniment avec* y.

57. Les résultats trouvés au numéro précédent vont nous fournir une nouvelle loi asymptotique peut-être plus curieuse encore. Revenons à l'équation (5) écrite en tête du n° 55. On peut y supprimer respectivement dans les deux membres les deux termes

$$-\frac{1}{y}\sum_{p<y} lp \quad \text{et} \quad -1,$$

qui se détruisent à la limite, de telle sorte que cette équation se réduit à la relation

$$\sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} = ly - C + \varepsilon;$$

de là le théorème remarquable que voici :

Théorème. — *La différence des deux quantités indéfiniment croissantes*

$$ly - \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1},$$

a pour limite la constante d'Euler quand y *tend vers l'infini.*

Ce théorème appelle un rapprochement. Formons les différences

$$ly - \sum_{p<y}\frac{lp}{p-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n<y}\frac{1}{n} - ly,$$

la somme s'étendant dans la première aux nombres premiers et dans la seconde aux nombres naturels, on voit que ces deux différences ont la même valeur asymptotique, la constante d'Euler, quand on fait tendre y vers l'infini.

APPENDICE A LA PREMIÈRE PARTIE.

Réflexions applicables a une formule donnée par Riemann.

Rappelons d'abord la formule de Riemann, dont on se sert pour exprimer combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée

$$f(x) = \mathrm{L}i(x) + \sum_{\alpha} \left[\mathrm{L}i(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{L}i(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right]$$
$$+ \int_{x}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0).$$

La fonction $f(x)$ de cette formule est définie par l'équation

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} \mathrm{F}(x^{\frac{1}{n}}),$$

où $\mathrm{F}(x)$ désigne combien il y a de nombres premiers inférieurs à x. La somme $\sum_{\alpha}$ s'étend à toutes les racines α de $\xi(t)$ associées deux à deux.

Certains auteurs ont cru trouver dans ces derniers temps (*) une démonstration plus ou moins indirecte de cette formule. On nous permettra à cette occasion de faire ici quelques réflexions qui ne seront peut-être pas sans importance.

Seulement, au lieu de raisonner sur la formule de Riemann, qui ne figure pas dans notre Mémoire, nous allons raisonner sur une formule plus simple, qui est entièrement de même nature, donne lieu

(*) La dernière tentative est due à M. von Mangoldt : *Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel: Zu Riemann's Abhandlung, über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse*, Sitzungsberichte der König. Preuss. Akademie der Wiss. zu Berlin, t. XXXVI, 1894.

Il y a, dans cette démonstration, une erreur irrémédiable. M. von Mangoldt admet (en haut de la page 892, p. 10 de l'extrait) qu'une somme d'un nombre H de termes, qui tendent vers zéro, tend aussi vers zéro. Mais, en même temps H augmente indéfiniment, ce que l'auteur paraît oublier. — L'article de M. von Mangoldt vient d'être traduit par M. Laugel dans les Annales de l'École normale supérieure. t. XIII, 1896.

aux mêmes difficultés et représenterait comme celle de Riemann une fonction discontinue.

Pour obtenir cette formule, supposons qu'il soit permis de différentier l'équation du n° 28 pour une valeur de y différente d'un nombre premier ou d'une puissance d'un nombre premier. Les sommes devront être traitées comme des constantes, et en multipliant ensuite par y, on trouvera l'équation

$$(2) \quad . \quad . \quad \frac{1}{y}\sum_{p^m<y} lp = 1 - \frac{1}{y}\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho} + \sum_{m}\frac{y^{-2m-1}}{2m}.$$

On sait d'ailleurs que la valeur asymptotique du premier membre est l'unité, premier terme du second membre, mais cela ne résulte pas de cette relation.

Je vais faire sur cette équation quelques remarques applicables sans changement à la formule de Riemann et à d'autres du même genre qui représentent ou devraient représenter des fonctions discontinues.

Le second membre de la formule (2) renferme une série qui n'est pas absolument convergente, savoir

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho},$$

parce qu'il résulte de la loi de croissance des racines ρ que la série

$$\sum_{\rho} \operatorname{mod}\frac{1}{\rho}$$

a une valeur infinie. Dès lors, si la série (3) est convergente, cette convergence est due aux changements de signes de ses termes, et sa valeur dépend de l'ordre dans lequel ses termes sont rangés. On peut tirer de là la conséquence suivante :

Toute appréciation de l'ordre de grandeur de la série supposée convergente

$$\sum\frac{y^{\rho-1}}{\rho},$$

tirée de la considération de la série elle-même, est dépourvue de valeur, si elle ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les termes

sont rangés, et si elle ne repose pas sur une connaissance précise des valeurs successives des racines ρ, valeurs qui déterminent les changements de signes des termes de la série. Or l'obscurité qui enveloppe ces racines est impénétrable à l'heure actuelle, et rend, par conséquent, toute tentative d'évaluation impossible. Il résulte de là qu'alors même qu'on admettrait que la série

$$\sum_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho}$$

est convergente et que l'équation (2) est exacte, cette équation serait pratiquement chimérique et il n'y aurait rien à en conclure.

Mais nous avons supposé ici gratuitement l'exactitude de la formule (2). Pour que la dérivation qui l'a fournie fût légitime, il faudrait pouvoir démontrer que la série (3) converge uniformément dans le voisinage de la valeur considérée de y. Pour se rendre compte de la difficulté contre laquelle toute tentative de démonstration va venir se heurter, il suffit de jeter les yeux sur le premier membre de l'équation (2). On y trouve une fonction discontinue qui change brusquement de valeur quand y devient égal à une puissance d'un nombre premier. Il résulte de là que si la formule (2) est exacte, la série

$$\sum_{\rho} \frac{y^{\rho-1}}{\rho}$$

ne peut converger uniformément que dans les intervalles de ces puissances. Donc toute preuve de l'uniformité de la convergence devra commencer par se restreindre à ces intervalles, dont la loi nous est aujourd'hui complètement inconnue.

On répondra peut-être à cette objection qu'on peut démontrer la formule par une autre voie, sans devoir se baser sur l'uniformité de la série (3).

Il y a, en effet, deux manières encore de démontrer la formule (2) ou les formules analogues.

La première consiste à considérer la série (3) comme limite d'une somme (certainement convergente)

$$\sum_{p} u_p(y, m),$$

dont les termes $u_p(y, m)$ dépendent d'un paramètre variable m et tendent respectivement vers ceux de la série (3) quand m tend vers une certaine limite, par exemple a Le nombre des termes de la somme $\sum_p$ peut être illimité quel que soit m, ou seulement croître indéfiniment quand m tend vers a. Au fond, cela revient au même. Dans les deux cas, pour que le passage à la limite fût rigoureux, il faudrait pouvoir établir, d'une manière ou d'une autre, le point suivant :

Si l'on partage la somme en deux parties

$$\sum_{p=1}^{n} u_p(y, m) + \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p(y, m),$$

l'une bornée aux n premiers termes, l'autre étendue à tous les termes suivants, il faudra pouvoir prendre n assez grand pour que la seconde somme soit aussi petite que l'on veut, quel que soit m, au moins dans le voisinage de $m = a$. Cette démonstration est certainement impossible, si on laisse y indéterminé. En effet, quelque grand que soit n, la somme

$$\sum_{p=n}^{\infty} u_p(y, m)$$

admettra, y et m variant, toutes les mêmes discontinuités que le premier membre de l'équation (2). On retombe donc au fond sur la même difficulté que tout à l'heure.

Il ne reste donc plus qu'une seule méthode, la seule, croyons-nous, qui ne soit pas irréalisable, c'est de sommer directement la série. C'est ainsi que l'on procède pour démontrer la convergence des séries de Fourier. Que l'on songe maintenant aux difficultés que l'on rencontre déjà dans la théorie de cette série où la loi de formation des termes périodiques est la plus simple qu'il soit possible d'imaginer, on sera tenté de se dire qu'alors même que l'on aurait la connaissance exacte de la composition des termes de la série (3), le problème de sommer cette série pourrait encore se heurter à des difficultés insurmontables. Que faut-il en penser tant que la loi de formation des termes est inconnue ?

Enfin, le rapprochement avec la série de Fourier appelle une dernière remarque On sait que la série de Fourier peut servir par un choix convenable de ses coefficients à la représentation d'une fonction

arbitraire. Or la série (3), comme aussi la série de Riemann écrite plus haut, comme toutes les séries analogues, n'est au fond qu'une série trigonométrique dont les éléments nous sont inconnus. Quelle lumière peut-on espérer tirer d'une pareille représentation?

La seule conclusion qu'il y ait à tirer de là, c'est que la preuve de la formule de Riemann paraît être actuellement au-dessus de toutes les ressources de l'analyse.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

DEUXIÈME PARTIE

LES FONCTIONS DE DIRICHLET ET LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME LINÉAIRE $Mx + N$ (*).

CHAPITRE PREMIER.

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES.

§ 1. — *Définition et propriétés des fonctions* $\psi_1(\alpha, x)$ *et* $\psi_2(\alpha, x)$.

1. On a déjà indiqué plusieurs méthodes différentes pour démontrer les propriétés fondamentales de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et des fonctions qui s'y rattachent. On les déduit soit de la théorie des fonctions elliptiques, soit de la théorie des

(*) La deuxième et la troisième partie du Mémoire ont été présentées à la Société dans la séance du 16 avril 1896. Une analyse détaillée en a paru dans le *Bulletin* (session du 29 octobre 1896). Depuis lors M. Hadamard a publié des recherches sur le même sujet dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXIV, 1896, dernier fascicule). Il trouve par une méthode différente la plupart des résultats nouveaux qui se trouvaient dans notre travail. L'intérêt de nos recherches ne disparaît pas cependant tout entier; nous entrons dans le détail des démonstrations que M. Hadamard a supprimées et nous établissons des formules plus générales que les siennes. Par contre, M. Hadamard simplifie beaucoup sur un point une des démonstrations de notre première partie, nous avons cru devoir profiter de cette simplification (voir la note à la fin de la troisième partie du Mémoire).

résidus des intégrales définies. Cependant aucune de ces méthodes ne nous paraît rattacher ces propriétés à leur point de départ le plus naturel. Les recherches que nous avons faites nous ont conduit a en trouver une nouvelle, qui, tout en étant tout aussi rigoureuse, a sur les précédentes l'avantage de la simplicité. C'est cette méthode que nous allons faire connaître.

2. Nous prendrons, comme point de départ, la valeur d'une intégrale définie célèbre et qui joue un rôle important en physique mathématique. Désignons par $a > 0$ et k deux constantes réelles; cette intégrale est la suivante (*) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi x^2} \cos(2k\pi x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-k^2 \frac{\pi}{a}}.$$

Dans le second membre, il n'y a aucune ambiguïté sur la valeur du radical $\sqrt{a}$ qui est pris positivement.

3. *Définition de* $\psi_1(\alpha, x)$ *et développement en série trigonométrique.* — Nous définirons cette fonction par la relation

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \psi_1(\alpha, x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-(n+\alpha)^2 \pi x}.$$

On suppose α et x réels et $x > 0$: la série étendue à toutes les valeurs positives et négatives de n est alors absolument convergente et a visiblement pour somme une fonction périodique de α dont la période est l'unité. Cette fonction est donc développable, pour toute valeur réelle de α, en série trigonométrique de la forme

$$\psi_1(\alpha, x) = \frac{}{2} a_0 + a_1 \cos 2\pi\alpha + \cdots + a_k \cos 2k\pi\alpha + \cdots,$$

ne renfermant pas de sinus. Les coefficients auront pour valeur

$$a_k = 2\int_0^1 \psi_1(\alpha, x) \cos(2k\pi\alpha)\,d\alpha.$$

(*) C. Jordan, *Cours d'analyse*, t. II, 2e édit., 1894, n° 272.

Ces coefficients s'expriment donc d'abord par une somme d'intégrales définies. Mais ces sommes se ramènent immédiatement à une intégrale unique, savoir :

$$a_0 = 2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2\pi x}\,d\alpha = \frac{2}{\sqrt{x}},$$

$$a_k = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\pi x}\cos(2k\pi\alpha)\,d\alpha = \frac{2}{\sqrt{x}}\,e^{-\frac{k^2\pi}{x}}.$$

En substituant ces valeurs, on trouve donc la relation fondamentale

$$(2)\quad .\quad .\quad .\ \psi_1(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi}{x}}\cos(2k\pi\alpha)\right].$$

Cette relation, dans laquelle on reconnaît une sorte de réciprocité par rapport à x, exprime la propriété la plus remarquable de la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ et l'aisance avec laquelle elle s'obtient nous engage à la prendre comme base des considérations qui vont suivre (*).

4. Remarquons qu'en posant $\alpha = 0$ dans la dernière équation, on retrouve immédiatement la relation obtenue par Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques (**) :

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi}{x}}\right].$$

La propriété fonctionnelle de $\zeta(s)$ est, comme on le sait, une simple conséquence de cette relation.

5. *Définition de* $\psi_2(\alpha, x)$ *et développement en série trigono-*

(*) La relation (2) est un cas particulier de la relation entre les fonctions θ d'argument réel et imaginaire. Le principe de la démonstration que nous exposons appartient à Dirichlet. Notre démonstration est cependant plus simple que la sienne. (Voir EMREPER, *Elliptische Functionen Theorie und Geschichte*, 2e édition, § 18.)

(**) V. BACHMAN, *Die Analytische Zahlentheorie*, p. 169, n° 8.

métrique. — Nous définirons cette fonction par la série

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi_2(\alpha, x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2 \pi x}.$$

Le développement de cette fonction en série trigonométrique se déduit immédiatement du précédent, en dérivant par rapport à α, ce qui est permis. On trouve

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi_2(\alpha, x) = \frac{2}{x\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{k=\infty} k e^{-k^2 \frac{\pi}{x}} \sin 2k\pi\alpha.$$

Cette nouvelle relation est la propriété fondamentale de $\psi_2(\alpha, x)$. On y retrouve la même réciprocité par rapport à x que dans les précédentes. Cette réciprocité joue, comme on le verra, un rôle caractéristique dans les recherches que nous allons faire.

§ 2. — *Définition et propriétés des fonctions* $\zeta_1(\alpha, s)$ *et* $\zeta_2(\alpha, s)$.

Ces nouvelles fonctions sont dans une relation très étroite avec une fonction introduite dans l'analyse par M. Piltz à l'occasion du sujet qui nous occupe (*). Cette fonction $B(\alpha, s)$ de M. Piltz est étudiée directement dans le Mémoire de cet auteur et par une méthode beaucoup plus laborieuse que la nôtre, mais l'importance des résultats déjà obtenus par M. Piltz nous engage à en parler, pour indiquer où se trouve le point de contact des deux méthodes. Ajoutons que ces fonctions sont des cas particuliers d'une fonction plus générale étudiée plus tard par M. Lipschitz (**).

(*) *Ueber die Häufigkeit der Primzhalen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze.* Dissertation v. ADOLF PILTZ. Iéna, 1884, A. Neuenhahn. On trouvera une courte analyse de cet ouvrage dans l'*Analytische Theorie der Zahlen* de M. BACHMAN, p. 487.

(**) *Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.* JOURNAL DE CRELLE, t CV, 1889. Ce Mémoire important contient un nombre considérable de formules que nous retrouvons dans celui-ci.

6. *Définition de* $\zeta_1(\alpha, s)$, *sa relation avec* $\psi_1(\alpha, x)$. — Supposons que α soit un nombre positif > 0 et < 1; nous définirons la fonction $\zeta_1(\alpha, s)$ de la variable réelle ou complexe s par l'équation

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \zeta_1(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\alpha)^s}.$$

Pour que ces expressions soient convergentes, on doit supposer $\mathfrak{R}(s) > 1$. Les séries sont alors absolument et uniformément convergentes pour $\mathfrak{R}(s) > 1 + \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε. La fonction $\zeta_1(\alpha, s)$ est donc une fonction synectique de la variable s pour $\mathfrak{R}(s) > 1$. Dans la définition de $\zeta(\alpha, s)$ par la formule précédente, on ne laisse aucune ambiguïté dans la détermination des termes de la série; on convient de poser

$$(n+\alpha)^{-s} = e^{-s \log(n+\alpha)}$$

et d'attribuer au logarithme sa valeur réelle, de manière que tous les termes soient réels et positifs en même temps que s.

La fonction $\zeta_1(\alpha, s)$ s'exprime aisément, comme nous allons le voir, au moyen de $\psi_1(\alpha, x)$.

On a les relations

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{(n+\alpha)^s} = \int_0^\infty e^{-(\alpha+n)^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{(n-\alpha)^s} = \int_0^\infty e^{-(\alpha-n)^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

donc, en ajoutant ensemble toutes les équations qui se déduisent des précédentes pour toutes les valeurs positives de n, on trouve, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_1(\alpha, s) = \int_0^\infty \psi_1(\alpha, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

7. Les formules du numéro précédent ne sont valables que pour $\mathfrak{R}(s) > 1$; aussi nous n'avons jusqu'à présent de définition

de $\zeta_1(\alpha, s)$ que dans cette partie du plan. Mais l'extension de la fonction se fait sans peine à tout le plan, comme nous allons le montrer.

On a en effet, par le partage de l'intervalle d'intégration,

$$\int_0^\infty \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \int_1^\infty \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx + \int_0^1 \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx.$$

Mais on a, par la formule (2) du n° 3,

$$\int_0^1 \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \int_0^1 \left[1 + 2\sum_{k=1}^\infty e^{-\frac{k^2\pi}{x}} \cos(2k\pi\alpha)\right] x^{\frac{s-3}{2}}\, dx.$$

Le second membre se sépare donc en une somme d'intégrales. La première s'évalue immédiatement; on change la variable d'intégration x en $\frac{1}{x}$ dans les suivantes. On trouve ainsi :

$$\int_0^1 \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \frac{2}{s-1} + 2\sum_{k=1}^\infty \cos(2k\pi\alpha) \int_1^\infty e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{1+s}{2}}\, dx.$$

En définitive, la formule (6) se mettra sous la forme suivante

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_1(\alpha, s) &= \frac{2}{s-1} + \int_1^\infty \psi_1(\alpha, x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx \\ &\quad + 2\sum_{k=1}^\infty \cos(2k\pi\alpha) \int_1^\infty e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{1+s}{2}}\, dx. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît à première vue que le second membre de cette équation est convergent quel que soit s. Cette équation nous fournit donc une représentation de $\zeta_1(\alpha, s)$ applicable dans tout le plan. Elle montre que $\zeta_1(\alpha, s)$ est une fonction méromorphe de s qui n'a qu'un seul pôle $s = 1$.

8. *Développement de $\zeta_1(\alpha, s)$ en série trigonométrique.* — Cette fonction présente une particularité curieuse : elle n'est développable en série trigonométrique par rapport à α que si la partie réelle de s est négative.

Supposons donc $\mathfrak{R}(s) < 0$; on trouvera, en répétant les calculs du numéro précédent,

$$\int_1^\infty \psi_1(\alpha, x) x^{\frac{s}{2}-1} dx = -\frac{2}{s-1} + 2\sum_{k=1}^\infty \cos(2k\pi\alpha) \int_0^1 e^{-k^2\pi x} x^{-\frac{1+s}{2}} dx,$$

et, en substituant dans la formule (7),

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_1(\alpha, s) = 2\sum_{k=1}^\infty \cos(2k\pi\alpha) \int_0^\infty e^{-k^2\pi x} x^{-\frac{1+s}{2}} dx.$$

Toutes ces intégrales se calculent facilement et l'on obtient finalement, toujours dans l'hypothèse $\mathfrak{R}(s) < 0$,

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_1(\alpha, s) = 2\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2k\pi\alpha}{k^{1-s}}.$$

Cette relation se simplifie au moyen de la théorie des fonctions eulériennes qui donne (*)

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{2^s \Gamma(1-s) \sin\frac{s\pi}{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

(*) On a (SERRET, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. II, §§ 518 et 519) les deux formules :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}, \quad \Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2s}}\Gamma(2s).$$

Si l'on change s en $\frac{s}{2}$ dans la première et s en $\frac{s+1}{2}$ dans la seconde, on trouve

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = -\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{s\pi}{2}},$$

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^s}\Gamma(s+1).$$

Puis, en divisant membre à membre,

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)} = \frac{1}{2^s\sqrt{\pi}}\Gamma(1+s)\sin\frac{s\pi}{2}.$$

Enfin, en changeant s en $-s$, on trouve le résultat utilisé ici.

On trouve ainsi, en réduisant,

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad \zeta_1(\alpha, s) = \frac{2^{1+s}}{\pi^{1-s}} \Gamma(1-s) \sin \frac{s\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi\alpha}{k^{1-s}}.$$

C'est le développement trigonométrique que nous voulions obtenir et qui est légitime pour $\mathfrak{R}(s) < 0$.

9. *Définition de* $\zeta_2(\alpha, s)$, *sa relation avec* $\psi_2(\alpha, x)$. — Soit, comme tout à l'heure, α une quantité positive, comprise entre zéro et un (limites exclues). La fonction $\zeta_2(\alpha, s)$ est la fonction de la variable complexe s définie, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, par l'équation

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \zeta_2(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\alpha)^s}.$$

Il existe entre ζ_2 et ψ_2 une relation du même genre que celle qui unit ζ_1 à ψ_1. On a, en effet,

$$\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{1}{(n+\alpha)^s} = \int_0^{\infty} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2 \pi x} x^{\frac{s-1}{2}} dx,$$

$$-\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{1}{(n-\alpha)^s} = \int_0^{\infty} (\alpha - n) e^{-(\alpha-n)^2 \pi x} x^{\frac{s-1}{2}} dx.$$

Attribuant successivement, dans ces équations, toutes les valeurs positives à n, puis ajoutant toutes les équations correspondantes membre à membre, on trouve, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$(10) \quad . \quad . \quad \pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \zeta_2(\alpha, s) = \int_0^{\infty} \psi_2(\alpha, x) x^{\frac{s-1}{2}} dx.$$

10. La fonction $\zeta_2(\alpha, s)$ n'est définie par l'équation précédente que pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, mais la propriété fondamentale de ψ_2 nous permet d'obtenir aisément pour ζ_2 une représentation valable dans toute l'étendue du plan.

On a, en effet,

$$\int_0^{\infty} \psi_2(\alpha, x) x^{\frac{s-1}{2}} dx = \int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, x) x^{\frac{s-1}{2}} dx + \int_0^{1} \psi_2(\alpha, x) x^{\frac{s-1}{2}} dx,$$

et par la formule (4),

$$\int_0^1 \psi_2(\alpha, x)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx = 2\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-2}\, dx \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{k^2\pi}{x}} \sin(2k\pi\alpha)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{s}{2}}\, dx.$$

On tire de là, pour $\zeta_2(\alpha, s)$, l'expression valable dans tout le plan

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta_2(\alpha, s) &= \int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, x)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx \\ &\quad + 2\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{s}{2}}\, dx. \end{aligned} \right.$$

Cette formule montre que la fonction $\zeta_2(\alpha, s)$ est une fonction synectique dans toute l'étendue du plan.

11. *Développement de $\zeta_2(\alpha, s)$ en série trigonométrique.* — Ce développement suppose encore que l'on ait $\Re(s) < 0$. On trouve, dans cette hypothèse, par une transformation analogue à celle du numéro précédent,

$$\int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, x)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx = 2\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_0^1 e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{s}{2}}\, dx,$$

et en substituant ce résultat dans la dernière formule,

$$\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta_2(\alpha, s) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_0^{\infty} e^{-k^2\pi x}\, x^{-\frac{s}{2}}\, dx.$$

Enfin, en remplaçant toutes ces intégrales par leur valeur, on trouve, dans l'hypothèse $\Re(s) < 0$,

$$\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\zeta_2(\alpha, s) = 2\pi^{-\frac{2-s}{2}}\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi\alpha)}{k^{1-s}}.$$

Cette équation peut se transformer au moyen de la formule suivante, empruntée à la théorie des fonctions eulériennes (*),

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} = \frac{2^s\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}}{\sqrt{\pi}},$$

ce qui donne

$$(12) \quad . \quad . \quad \zeta_2(\alpha, s) = \frac{2^{1+s}}{\pi^{1-s}}\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi\alpha)}{k^{1-s}}.$$

C'est le développement trigonométrique que nous voulions obtenir et qui est légitime pour $\mathcal{R}(s) < 0$.

12. *Définition de la fonction* $B(\alpha, s)$. — Cette fonction est définie, pour $\mathcal{R}(s) > 1$, par la formule

$$B(\alpha, s) = \frac{1}{\alpha^s} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^s}.$$

Cette fonction a été introduite dans l'analyse par M. Piltz (sauf que M. Piltz change le signe de s). On la ramène immédiatement aux deux précédentes par la relation

$$B(\alpha, s) = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(\alpha, s) + \zeta_2(\alpha, s)\right].$$

Les propriétés de cette fonction sont donc complètement éclaircies par ce qui précède et on peut obtenir, pour la représenter, des expressions valables pour toute valeur de s.

Si l'on suppose $\mathcal{R}(s) < 0$, le développement trigonométrique de $B(\alpha, s)$ par rapport à α se déduit immédiatement des formules (12) et (8) :

$$B(\alpha, s) = \frac{2^s}{\pi^{1-s}}\Gamma(1-s)\left[\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi\alpha)}{k^{1-s}} + \cos\frac{s\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi\alpha)}{k^{1-s}}\right].$$

(*) Cette formule est équivalente à la formule analogue du n° 8 et s'en déduit par le changement de s en $(s-1)$.

La relation précédente est la relation fondamentale de M. Piltz, qui l'a démontrée directement par le calcul des coefficients du développement trigonométrique. Cette formule sert de base à ses recherches ultérieures. Pour nous, elle ne nous sera d'aucune utilité dans cette partie du Mémoire et nous n'en parlerons plus. Nous aurons toujours recours aux propriétés des fonctions beaucoup plus maniables $\psi_1(\alpha, x)$ et $\psi_2(\alpha, x)$.

§ 3. — *Application des méthodes de M. Hadamard à certaines fonctions.*

Nous allons démontrer d'abord quelques théorèmes dont nous aurons à faire un usage répété dans la suite.

13. Théorème I. — *Désignons par* a (*supposé* > 0) *et* k *deux constantes réelles, et par* η *une quantité qui tend vers zéro quand* n *tend vers l'infini; on peut écrire l'équation*

$$\int_1^\infty e^{-ax} x^k (lx)^n \, dx = \left[(1+\eta) ln\right]^n.$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons montrer que l'intégrale du premier membre est comprise entre deux expressions, toutes les deux de la forme du second membre.

Cherchons d'abord une limite supérieure de cette intégrale. En désignant par ε une constante infiniment petite, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,

$$\int_1^\infty e^{-ax} x^k (lx)^n \, dx > \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} e^{-ax} x^k (lx)^n \, dx,$$

et, par le théorème de la moyenne, il vient $(0 < \theta < 1)$

$$\int_1^\infty e^{-ax} x^k (lx)^n \, dx > e^{-(n-\theta)a\varepsilon} (n-\theta)^k \left[l\varepsilon(n-\theta)\right]^n \varepsilon$$

$$> \left[\varepsilon^{\frac{1}{n}} e^{-\left(1-\frac{\theta}{n}\right)a\varepsilon} (n-\theta)^{\frac{k}{n}} l.\varepsilon(n-\theta)\right]^n.$$

Mais la quantité

$$\varepsilon^{\frac{1}{n}} e^{-\left(1-\frac{\theta}{n}\right)a\varepsilon} (n-\theta)^{\frac{k}{n}} \frac{l.\varepsilon(n-\theta)}{ln}$$

tend vers $e^{-a\varepsilon}$ quand n tend vers l'infini. On peut donc, en désignant en général par η une quantité qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini, mettre la dernière inégalité sous la forme

$$\int_1^\infty e^{-ax} x^k (lx)^n dx > \left[(1+\eta) e^{-a\varepsilon} ln\right]^n,$$

et, comme ε est un infiniment petit, ce second membre peut être remplacé, vu la nature du théorème, par

$$\left[(1+\eta) ln\right]^n.$$

Cherchons, d'autre part, une limite supérieure de la même intégrale. Pour cela, désignons par ε une constante inférieure à a; on peut évidemment écrire l'inégalité

$$\int_1^\infty e^{-ax} x^k (lx)^n dx < \left[\max . e^{-(a-\varepsilon)x} x^k (lx)^n\right] \int_1^\infty e^{-\varepsilon x} dx$$
$$< \frac{1}{\varepsilon} \max . e^{-(a-\varepsilon)x} x^k (lx)^n.$$

Or, le *maximum* correspond à la valeur de x qui annule la dérivée, c'est-à-dire la fonction

$$e^{-(a-\varepsilon)x} x^{k-1} (lx)^n \left[-(a-\varepsilon)x + k + \frac{n}{lx}\right].$$

La valeur de x qui annule cette dérivée est donc fournie par l'équation

$$(a-\varepsilon)x = k + \frac{n}{lx};$$

elle augmente indéfiniment avec n et a pour valeur approximative, quand n est grand,

$$x = \frac{1}{a-\varepsilon} \frac{n}{ln}.$$

Dans le sens général donné à η, on pourra donc écrire, pour cette valeur de x,

$$e^{-(a-\varepsilon)x} = e^{k+\frac{n}{lx}} = (1+\eta)^n.$$

D'ailleurs, pour cette valeur de x, les deux quantités x^k et $1 : \varepsilon$ sont visiblement de cette même forme $(1+\eta)^n$; la quantité $(lx)^n$ de la forme $[(1+\eta)\,ln]^n$ et, par conséquent, aussi

$$\frac{1}{\varepsilon}\max.e^{-(a-\varepsilon)x}\,x^k(lx)^n = \left[(1+\eta)\,ln\right]^n,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

14. *Remarque* I. — Il résulte immédiatement de l'application du théorème de la moyenne, que si l'on désigne par $\varphi(x)$ une fonction continue de x qui tend vers une limite finie positive et non nulle quand x tend vers l'infini, on peut aussi écrire, sous les conditions du théorème précédent,

$$\int_1^\infty \varphi(x)e^{-ax}\,x^k(lx)^n\,dx = \left[(1+\eta)ln\right]^n.$$

15. *Remarque* II. — De même, plus généralement, si l'on désigne par $\theta(x)$ une fonction continue, qui reste comprise entre des limites finies (positives ou négatives) quand x augmente indéfiniment, on peut aussi écrire sous les conditions du théorème précédent:

$$\text{mod}\int_1^\infty \theta(x)e^{-ax}\,x^k(lx)^n\,dx \lesseqgtr \left[(1+\eta)\,ln\right]^n.$$

16. Théorème II. — *Soit* $\theta(x)$ *une fonction continue, qui conserve une valeur finie quand* x *tend vers l'infini, et* a *une constante positive; la fonction de* s, *représentée par l'intégrale*

$$f(s) = \int_1^\infty \theta(x)e^{-ax}\,x^s dx,$$

est une fonction synectique dans toute l'étendue du plan et cette fonction ne peut être d'un genre supérieur au premier (*).

L'intégrale est absolument et uniformément convergente dans toute portion du plan s; donc elle représente une fonction synectique dans tout le plan. Par conséquent, elle est développable en série de Maclaurin convergente pour toute valeur de s, sous la forme

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots.$$

Les coefficients se calculent par la formule

$$a_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^\infty \theta(x)\, e^{-ax}(lx)^n\, dx,$$

et l'on a, par la remarque du n° 15,

$$|\, a_n \,| < \frac{1}{n!}\left[(1+\eta)ln\right]^n.$$

La formule précédente fait connaître la décroissance des coefficients a_n. On peut en déduire le genre de la fonction par la méthode de M. Hadamard. Celui-ci a démontré que lorsque le coefficient a_n est de l'ordre de $\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\lambda}}}$ où λ est un entier $E + 1$, la fonction est du genre E ou du genre $(E + 1)$. Dans le cas actuel, $\lambda = 1$, parce que $(ln)^n$ est un infiniment petit par rapport à toute puissance positive constante de $n!$. Donc la fonction que nous considérons est du genre *zéro* ou du genre *un*.

17. Théorème III. — *Si la fonction* f(s) *du théorème précédent possède des racines* ρ, *et si ces racines sont en nombre illimité, la série étendue à toutes ces racines*

$$\sum \frac{1}{(\text{mod}\ \rho)^k},$$

sera convergente pour $k > 1$.

(*) Il est clair que le théorème subsistera, si l'on remplace dans l'intégrale s par une fonction linéaire de s.

Ce théorème résulte encore de la règle suivante, découverte par M. Hadamard :

Soit $\varphi(n)$ une fonction constamment croissante avec n; si le coefficient a_n décroît plus vite que

$$\frac{1}{\varphi(n)^n},$$

le module de la n^{me} racine ρ_n, ces racines étant supposées rangées par ordre de modules croissants, sera supérieur à $\varphi(n)$.

On a ici

$$\text{mod } a_n \overline{\overline{<}} \frac{1}{n!}\left[(1+\eta)\, ln\right]^n,$$

et comme, par la formule de Stirling,

$$n! = \left[(1+\eta)\frac{n}{e}\right]^n,$$

il vient donc

$$\text{mod } a_n \overline{\overline{<}} \frac{1}{\left[(1+\eta)\dfrac{n}{eln}\right]^n},$$

et l'application de la règle de M. Hadamard donne

$$\text{mod } \rho_n > \frac{1}{e}\frac{n}{ln}.$$

La série dont il est question dans l'énoncé du théorème converge donc plus rapidement que la série

$$\sum\left(\frac{ln}{n}\right)^k,$$

qui est convergente pour $k > 1$. Le théorème est donc établi.

18. *Remarque.* — L'application des méthodes utilisées dans les numéros qui précèdent permet d'établir très aisément que les fonctions ζ_1 et ζ_2 de s étudiées dans le paragraphe précédent sont des fonctions du premier genre. Ce résultat nous étant inutile, nous ne nous arrêterons pas à le démontrer en détail.

CHAPITRE II.

ÉTUDE ANALYTIQUE DES FONCTIONS DE DIRICHLET ET DE FONCTIONS AUXILIAIRES DANS LE CAS D'UN MODULE p PREMIER.

L'étude des fonctions de Dirichlet, c'est-à-dire des fonctions qui interviennent dans la démonstration du théorème sur la progression arithmétique, donne lieu à des discussions nouvelles assez longues dans les cas des modules composés. Cette circonstance nous a engagé à traiter d'abord en détail le cas des modules premiers. Ce cas a été traité d'abord par M. Piltz, qui a rencontré une partie des résultats que nous allons démontrer. Nous les indiquerons au fur et à mesure qu'ils se présenteront.

§ 1. — *Définition des caractères d'un nombre* (mod p).

19. Soit p un nombre premier et n un nombre quelconque non divisible par p. Soit ensuite g une racine primitive de la congruence

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

et, d'autre part, ω une racine primitive de l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \omega^{p-1} = 1.$$

Désignons encore par ν l'indice du nombre n, selon le module p, c'est-à-dire le nombre unique inférieur à p qui vérifie la congruence

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad g^{\nu} \equiv n \pmod{p};$$

on dit que la quantité

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \chi(n, \bmod p) = \omega^{\nu h},$$

où h est un des entiers $0, 1, 2 \ldots (p-2)$, est un caractère du

nombre n (mod p). Quand aucune confusion n'est possible, ce caractère se représente simplement par $\chi(n)$.

Les quantités ω^h, savoir

$$1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{p-2},$$

sont les $(p-1)$ racines de l'équation (1). On peut donc dire encore que l'on forme les différents caractères d'un nombre n en remplaçant, dans l'expression

$$\chi(n) = \omega^\nu,$$

ω par les $(p-1)$ racines différentes de l'équation (1).

20. L'équation (1) a deux racines réelles $+1$ et -1, qui correspondent aux valeurs $h = 0$ et $h = \frac{p-1}{2}$. On appelle *caractère principal* celui qui correspond à la racine $+1$; il est égal à l'unité pour tous les nombres n. En dehors du caractère principal, il n'y en a qu'un seul qui soit réel pour tous les nombres n : il correspond à la racine (-1) et est égal à ± 1 suivant le nombre n.

Nous donnerons à tous les autres caractères le nom de *caractères imaginaires,* quoiqu'ils puissent avoir une valeur réelle pour certains nombres particuliers. Leur module est toujours égal à l'unité.

A tout caractère imaginaire $\chi(n)$ formé avec la racine ω^h correspond un caractère conjugué ou opposé, formé avec la racine ω^{-h} conjuguée de la première. Nous représenterons ce caractère conjugué par les notations

$$\frac{1}{\chi}(n) = \frac{1}{\chi(n)}.$$

Les caractères doivent être partagés en deux *classes,* mais cette distinction deviendra surtout importante plus tard. Le caractère principal forme à lui seul la première classe, et tous les autres caractères rentrent dans la seconde.

Quand il y aura lieu de les distinguer entre eux, nous représenterons les différents caractères par

$$\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_{p-2},$$

selon qu'ils sont formés avec les racines

$$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots \omega^{p-2}.$$

De la sorte, le caractère principal sera représenté par χ_0.

Je ferai remarquer encore que, pour un caractère χ_h quelconque, $\chi_h(-1)$ est réel et égal à ± 1 suivant que h est pair ou impair. En effet, l'indice de (-1) étant $\frac{p-1}{2}$, on a

$$\chi_h(-1) = \omega^{\frac{p-1}{2}h} = (-1)^h.$$

21. Les caractères ainsi définis jouissent de quatre propriétés fondamentales bien connues, que nous allons énoncer :

1° Pour tout caractère χ et deux nombres quelconques n et n', on a la relation fonctionnelle

$$\chi(n)\chi(n') = \chi(nn');$$

2° On a, pour un caractère quelconque,

$$\chi(n) = \chi(n'), \quad \text{si} \quad n \equiv n' \pmod{p};$$

3° Pour tout caractère, sauf le principal, on a

$$\sum_{n=1}^{p-1} \chi(n) = 0,$$

tandis que, pour le caractère principal,

$$\sum_{n=1}^{p-1} \chi(n) = 1;$$

4° Si l'on désigne par $\mathcal{S}$ une somme étendue à la totalité des caractères, on a

$$\mathop{\mathcal{S}}_{\chi} \chi(n) = 0,$$

sauf cependant si $n \equiv 1 \pmod{p}$, auquel cas

$$\mathop{\mathcal{S}}_{\chi} \chi(n) = p - 1.$$

§ 2. — *Définition et propriétés des fonctions* $\Psi_1(x, \chi)$ *et* $\Psi_2(x, \chi)$.

22. *Définition des fonctions* $\Psi_1(x,\chi)$ et $\Psi_2(x,\chi)$. — Ces deux fonctions, comme nous allons voir, sont étroitement liées aux fonctions $\psi_1(\alpha, x)$ et $\psi_2(\alpha, x)$, que nous avons considérées dans le chapitre Ier.

Dans le paragraphe actuel, nous supposons expressément que le caractère χ est différent du principal, et nous posons comme définition

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi \bmod p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}, \\ \Psi_2(x, \chi \bmod p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \chi(n) n e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}. \end{cases}$$

Dans ces sommes, on donne successivement à n toutes les valeurs entières premières avec p. C'est pour rappeler cette circonstance que nous avons accentué le signe Σ.

Ces équations (1) peuvent encore se mettre sous une autre forme. En remarquant la relation (21, 1°)

$$\chi(-n) = \chi(-1)\chi(n),$$

elles peuvent s'écrire

$$(2) \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = [1 + \chi(-1)] \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}, \\ \Psi_2(x, \chi) = [1 - \chi(-1)] \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) n e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}. \end{cases}$$

Rappelons encore que $\chi(-1) = \pm 1$, comme on l'a vu au n° 20; on aura :

1° Si $\chi(-1) = 1$,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{p}}, \\ \Psi_2(x, \chi) = 0; \end{cases}$$

2° Si $\chi(-1) = -1$,

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = 0, \\ \Psi_2(x, \chi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) n e^{-\frac{n^2 \pi x}{p}}. \end{cases}$$

On n'a donc à étudier la fonction Ψ_1 que si $\chi(-1) = 1$, et la fonction Ψ_2 que si $\chi(-1) = -1$.

23. *Étude de la fonction* $\Psi_1(x, \chi)$ *quand* $\chi(-1) = 1$. — Si l'on désigne par k un nombre entier inférieur à p, et tient compte de la relation (21, 2°)

$$\chi(n) = \chi(k) \quad \text{si} \quad n \equiv k \pmod{p},$$

le coefficient de $\chi(k)$ dans le second membre de l'équation

$$\Psi_1(x, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{p}}$$

aura pour valeur

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(k+mp)^2 \frac{\pi x}{p}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\left(m+\frac{k}{p}\right)^2 \pi p x} = \psi_1\left(\frac{k}{p}, px\right),$$

en vertu de la définition de Ψ_1 (n° 3).

On a donc, entre Ψ_1 et ψ_1, la relation

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \Psi_1(x, \chi) = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \psi_1\left(\frac{k}{p}, px\right).$$

Cette équation va nous servir à trouver la relation fonctionnelle que vérifie $\Psi_1(x, \chi)$. Elle se déduit de la relation établie pour $\psi_1(\alpha, x)$ au n° 3, et que voici :

$$\psi_1(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{x}} \cos 2n\pi\alpha\right].$$

Si l'on fait successivement $\alpha = \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots \frac{p-1}{p}$ et substitue dans l'équation (5) les expressions de ψ_1 tirées de l'équation précé-

dente, le terme qui ne renferme pas de cosinus disparaît, parce que la somme des caractères est nulle (21), et il vient

$$\Psi_1(x, \chi) = \frac{2}{\sqrt{px}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\frac{n^2\pi}{pc}} \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{p} \right].$$

Mais la somme

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{p}$$

s'évalue aisément :

1° Si n est un multiple de p, cette somme se réduit à

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) = 0;$$

2° Si n est premier avec p, on a (21, 1°)

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{p} = \frac{1}{\chi(n)} \sum_{k=1}^{p-1} \chi(kn) \cos \frac{2kn\pi}{p}.$$

Remarquons que quand k varie, kn représente, en même temps que k, un système complet de résidus (mod p). Posons d'après cela

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2k\pi}{p} = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(kn) \cos \frac{2kn\pi}{p} = \tau_1(\chi);$$

on aura

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{p} = \frac{1}{\chi(n)} \tau_1(\chi).$$

Il vient ainsi

$$\Psi_1(x, \chi) = \frac{2\tau_1(\chi)}{\sqrt{px}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\chi(n)} e^{-\frac{n^2\pi}{pc}},$$

et par la formule (3), puisque $\chi(-1) = 1$ par hypothèse,

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_1(x, \chi) = \frac{\tau_1(\chi)}{\sqrt{px}} \Psi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

Posons encore, pour simplifier,

$$\tau_1(\chi) = \varepsilon_1(\chi)\sqrt{p}.$$

L'équation (6) prend ainsi la forme

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_1(x, \chi) = \varepsilon_1(\chi)\frac{1}{\sqrt{x}}\Psi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right),$$

et telle est la relation fonctionnelle que vérifie la fonction Ψ_1.

Le facteur $\varepsilon_1(\chi)$, indépendant de x, a son module égal à l'unité. En effet, multiplions membre à membre l'équation (7) avec celle qui s'en déduit par le changement simultané de x en $1:x$ et de χ en $1:\chi$, et supprimons le facteur commun $\Psi_1(x,\chi)\Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right)$; il viendra

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon_1(\chi)\varepsilon_1\left(\frac{1}{\chi}\right) = [\text{mod}\ \varepsilon_1(\chi)]^2 = 1.$$

La même conclusion s'obtient en posant $x = 1$ dans l'équation (7), à condition que $\Psi_1(1, \chi)$ ne soit pas nul. On a, dans ce cas,

$$(8^a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon_1(\chi) = \frac{\Psi_1(1, \chi)}{\Psi_1\left(1, \frac{1}{\chi}\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n)\, e^{-\frac{n^2\pi}{p}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\chi(n)}\, e^{-\frac{n^2\pi}{p}}}.$$

24. *Remarque.* — Si χ est le caractère réel correspondant à la racine $\omega = (-1)$ (n° 20), on peut se servir, pour représenter ce caractère, du symbole de Legendre

$$\chi(n) = \frac{1}{\chi(n)} = \left(\frac{n}{p}\right).$$

Pour que $\chi(-1) = 1$, il faut que $p \equiv 1 \pmod 4$. On a, dans ce cas, par l'équation 8,

$$\varepsilon_1(\chi) = \pm 1,$$

et il vient

$$\tau_1(\chi) = \sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right)\cos\frac{2k\pi}{p} = \pm\sqrt{p}.$$

On retrouve donc ainsi, au signe près, la valeur de la somme de Gauss. Si $\Psi_1(1,\chi)$ n'est pas nul, la formule (8^a) montre que c'est le signe $+$ qu'il faut prendre. Gauss a montré que cette dernière conclusion est toujours vraie (*), de sorte qu'on a sans restriction $\varepsilon_1(\chi)=1$. Dans le cas du caractère réel, la relation (7) se réduit donc à

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_1(x,\chi)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Psi_1\left(\frac{1}{x},\chi\right).$$

25. *Étude de la fonction* $\Psi_2(x,\chi)$ *quand* $\chi(-1)=-1$. Si l'on groupe les termes comme au n° 23, on voit que le coefficient de $\chi(k)$ dans le second membre de l'équation

$$\Psi_2(x,\chi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \chi(n)ne^{-\frac{n^2\pi x}{p}},$$

a pour valeur

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(k+mp)e^{-(k+mp)^2\frac{\pi x}{p}}=p\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{k}{p}+m\right)e^{-\left(\frac{k}{p}+m\right)^2\pi px}=p\psi_2\left(\frac{k}{p},px\right).$$

Par conséquent,

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_2(x,\chi)=p\sum_{k=1}^{p-1}\chi(k)\psi_2\left(\frac{k}{p},px\right).$$

Comme dans le cas précédent, nous allons déduire la relation fonctionnelle vérifiée par Ψ_2 de la relation du n° 5, à laquelle satisfait ψ_2, savoir

$$\psi_2(\alpha,x)=\frac{2}{x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2\frac{\pi}{x}}\sin 2k\pi\alpha.$$

On fait successivement dans celle-ci $\alpha=\frac{1}{p},\frac{2}{p},\cdots\frac{p-1}{p}$, et l'on substitue dans l'équation (10); il vient ainsi

$$\Psi_2(x,\chi)=\frac{2}{x\sqrt{px}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[ne^{-\frac{n^2\pi}{px}}\sum_{k=1}^{p-1}\chi(k)\sin\frac{2kn\pi}{p}\right].$$

(*) *Summatio quarumdam serierum singularium* (1808). — Voir aussi DIRICHLET DEDEKIND, *Zahlentheorie*, supplement I.

On a d'ailleurs, comme au n° 23 :

1° Pour n multiple de p,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \sin \frac{2kn\pi}{p} = 0;$$

2° Pour n premier avec p,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \sin \frac{2k\pi}{p} = \chi(n) \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) \sin \frac{2kn\pi}{p} = \tau_2(\chi).$$

D'où l'équation

$$\Psi_2(x, \chi) = \frac{2\tau_2(\chi)}{x\sqrt{px}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\chi(n)} n e^{-\frac{n^2\pi}{px}},$$

et par la relation (4) du n° 22, puisque $\chi(-1) = -1$ par hypothèse,

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_2(x, \chi) = \frac{\tau_2(\chi)}{x\sqrt{px}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

Posons, pour simplifier,

$$\tau_2(\chi) = \varepsilon_2(\chi)\sqrt{p}.$$

L'équation (11) se mettra alors sous la forme

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_2(x, \chi) = \varepsilon_2(\chi) \frac{1}{x\sqrt{x}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

Telle est la relation fonctionnelle que vérifie la fonction $\Psi_2(x, \chi)$ quand $\chi(-1) = -1$. On montre, comme dans le cas précédent, que le module de $\varepsilon_2(\chi)$ est égal à l'unité.

26. *Remarque.* — Si χ est le caractère réel correspondant à la racine $\omega = -1$ de l'équation $\omega^{p-1} = 1$, on a

$$\chi(n) = \frac{1}{\chi(n)} = \left(\frac{n}{p}\right).$$

Lorsque $p \equiv 3 \pmod 4$, auquel cas

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = -1,$$

on en conclut

$$\tau_2(\chi) = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \sin \frac{2k\pi}{p} = +\sqrt{p}, \quad \varepsilon_2(\chi) = 1,$$

sans ambiguïté de signe, comme dans le cas précédent. La fonction correspondante possède alors la propriété fonctionnelle

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_2(x, \chi) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \chi\right).$$

§ 3. *Définition et propriétés des fonctions* $Z(s, \chi)$, $\xi_1(s, \chi)$ et $\xi_2(s, \chi)$.

27. Les fonctions $Z(s, \chi)$ sont celles que nous appelons fonctions de Dirichlet, parce que cet auteur les a introduites dans l'analyse. Elles jouent le rôle essentiel dans la démonstration du théorème sur la progression arithmétique. Nous allons étudier ici leurs propriétés fonctionnelles qui ont été découvertes par M. Piltz Mais au lieu de les établir directement, comme le fait cet auteur, nous allons les rattacher à celles des fonctions $\Psi_1(x, \chi)$ et $\Psi_2(x, \chi)$, que nous venons d'analyser (*).

28. Les fonctions $Z(s, \chi)$ sont définies, pour $\mathcal{R}(s) > 1$, par la série ou le produit infini

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad Z(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(n)}{n^s} = \Pi\left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1},$$

(*) Il convient d'ajouter que M. Lipschitz, auquel le travail de M. Piltz (1884) semble être resté inconnu, a retrouvé ces propriétés fonctionnelles par une méthode analogue à celle de M. Piltz dans son mémoire de 1889 déjà cité. (*Journ. de Crelle*, t. CV.)

où la somme accentuée est étendue à tous les nombres entiers non divisibles par p, le produit à tous les nombres premiers q autres que p.

Dans le paragraphe actuel, nous supposerons encore que χ est un caractère différent du principal. Dans cette hypothèse, la série converge pour $\mathfrak{R}(s) > 0$, mais nous n'utiliserons pas cette circonstance pour le moment.

29. Ces séries jouissent de propriétés différentes suivant que l'on a $\chi(-1) = +1$ ou -1. En effet, nous allons voir que, suivant l'hypothèse, elles se ramènent à la fonction ζ_1 ou à la fonction ζ_2 du premier chapitre.

1° Si $\chi(-1) = 1$, on a

$$\chi(k) = \chi(p-k),$$

et l'on peut écrire

$$Z(s,\chi) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi(k) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(mp+k)^s} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mp-k)^s} \right]$$

$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi(k) \zeta_1\left(\frac{k}{p}, s\right);$$

2° Si $\chi(-1) = -1$, on a

$$\chi(k) = -\chi(p-k),$$

et l'on peut écrire

$$Z(s,\chi) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi(k) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(mp+k)^s} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mp-k)^s} \right]$$

$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \chi(k) \zeta_2\left(\frac{k}{p}, s\right).$$

30. Nous allons encore montrer que, suivant l'un ou l'autre de ces deux cas, la fonction $Z(s,\chi)$ se ramène aussi à l'une des fonctions Ψ_1 ou Ψ_2. On pourrait déduire ce résultat des calculs

que nous venons de faire et de ceux du chapitre I, mais il est aussi simple de l'établir directement.

1° Si $\chi(-1)=1$, on part de la relation

$$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s}=\int_0^\infty e^{-n^2\frac{\pi x}{p}}x^{\frac{s}{2}-1}dx,$$

et l'on trouve par la formule (1) ci-dessus et la formule (3) du n° 22

$$(2)\quad .\quad .\quad \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \Psi_1(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

Pour $\chi(-1)=1$, nous définirons une nouvelle fonction $\xi_1(s,\chi)$ par l'équation

$$(3)\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad \xi_1(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z(s,\chi).$$

La fonction Z se ramènera ainsi à la fonction ξ_1, et l'on aura

$$(4)\quad .\quad .\quad .\quad .\quad \xi_1(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \Psi_1(x,\chi)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

On voit par les formules précédentes qu'il existe entre les fonctions Z et ξ_1 une relation analogue à celle qui lie les fonctions $\zeta(s)$ et $\xi(t)$ de Riemann.

2° Si $\chi(-1)=-1$, on part de la relation

$$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\frac{1}{n}=\int_0^\infty ne^{-n^2\frac{\pi x}{p}}dx,$$

et l'on trouve par la formule (1) du paragraphe actuel et la formule (4) du paragraphe précédent

$$(5)\quad .\quad .\quad \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)Z(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \Psi_2(x,\chi)x^{\frac{s-1}{2}}dx.$$

Nous définirons, comme dans le cas précédent, une nouvelle fonction $\xi_2(s, \chi)$ par l'équation

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi_2(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) Z(s, \chi);$$

la fonction Z se ramène ainsi à la fonction ξ_2, et l'on a

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi_2(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Psi_2(x, \chi)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx.$$

31. Les formules (4) et (7) du numéro précédent viennent d'être établies pour $\mathcal{R}(s) > 1$, mais ces formules restent convergentes et par conséquent valables pour toute valeur de s. Elles prouvent donc que $Z(s, \chi)$ est une fonction synectique dans tout le plan (le caractère χ étant supposé différent du principal). Toutefois cette circonstance n'est pas apparente dans les formules susmentionnées et, pour la mettre en pleine lumière, nous allons mettre les intégrales qui précèdent sous une autre forme, qui conduit encore à d'autres conséquences importantes.

1° Supposons d'abord $\chi(-1) = 1$. On a

$$\int_0^\infty \Psi_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \int_1^\infty \Psi_1 x^{\frac{s}{2}-1}\, dx + \int_0^1 \Psi_1 x^{\frac{s}{2}-1}\, dx.$$

Si l'on change la variable d'intégration x en $\frac{1}{x}$ dans la seconde intégrale, puis utilise la relation fonctionnelle (7) du paragraphe précédent (n° 23), il vient successivement

$$\int_0^1 \Psi_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1}\, dx = \int_1^\infty \Psi_1\left(\frac{1}{x}, \chi\right) x^{-\frac{s}{2}-1}\, dx$$

$$= \varepsilon_1(\chi) \int_1^\infty \Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s+1}{2}}\, dx,$$

et, en substituant dans la formule (4) qui a lieu pour $\chi(-1)=1$,

$$(4^a) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_1(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx \\ + \frac{1}{2}\varepsilon_1(\chi)\int_1^\infty \Psi_1\left(x,\frac{1}{\chi}\right)x^{-\frac{s+1}{2}}\,dx. \end{aligned} \right.$$

On voit maintenant, en se reportant à l'expression de Ψ_1 en série (n° 22), que le second membre converge pour toute valeur de s et représente une fonction entière de s dans toute l'étendue du plan.

La formule (4^a) met encore en lumière la propriété fonctionnelle de $\xi_1(s,\chi)$. Si l'on considère que l'on a (n° 23, form. 8)

$$\varepsilon_1(\chi)\cdot\varepsilon_1\left(\frac{1}{\chi}\right)=,$$

on reconnaîtra à la seule inspection du second membre l'exactitude de la relation

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi_1(s,\chi)=\varepsilon_1(\chi)\xi_1\left(1-s,\frac{1}{\chi}\right).$$

D'où le théorème suivant :

Si $\chi(-1)=1$, la fonction $\xi_1(s,\chi)$ se reproduit, multipliée par un facteur indépendant de s et de module égal à l'unité, par le changement simultané de s en $1-s$ et de χ en $\frac{1}{\chi}$; si, en particulier, χ est le caractère réel correspondant à la racine $\omega=-1$, la fonction se reproduit par le changement de s en $1-s$ (*).

2° Passons au cas où $\chi(-1)=-1$. On a, par les mêmes

(*) Dans le cas du caractère réel, cette propriété a été découverte par M. Hurwitz. (*Zeitschrift für Math. u. Ph.*, t. XXVII, 1882)

transformations que ci-dessus,

$$\xi_2(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2\left(\frac{1}{x},\chi\right) x^{-\frac{s-3}{2}}\, dx.$$

$$(7^a)\quad \xi_2(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2(x,\chi)\, x^{\frac{s-1}{2}}\, dx + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2(\chi)\int_1^\infty \Psi_2\left(x,\frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s}{2}}\, dx.$$

La formule (7^a), qui n'est qu'une autre forme de la formule (7), met en évidence que $\xi_2(s,\chi)$ est une fonction entière pour toute valeur de s. On en conclut, comme dans le premier cas, la relation fonctionnelle

$$(9)\quad \ldots\ldots\quad \xi_2(s,\chi) = \varepsilon_2(\chi)\,\xi_2\left(1-s,\frac{1}{\chi}\right).$$

D'où le théorème suivant :

Si $\chi(-1) = -1$, *la fonction* $\xi_2(s,\chi)$ *se reproduit, multipliée par un facteur indépendant de* s *et de module égal à l'unité, par le changement simultané de* s *en* $1-s$ *et de* χ *en* $\frac{1}{\chi}$. *En particulier, si* χ *est le caractère réel correspondant à la racine* $\omega = -1$, *la fonction se reproduit simplement par le changement de* s *en* $1-s$.

32. *Remarque.* — On peut encore énoncer les théorèmes contenus dans les formules (8) et (9) sous la forme suivante : *Les produits*

$$\xi_1(s,\chi)\,\xi_1\left(s,\frac{1}{\chi}\right),\quad \text{si}\quad \chi(-1) = 1;$$

$$\xi_2(s,\chi)\,\xi_2\left(s,\frac{1}{\chi}\right),\quad \text{si}\quad \chi(-1) = -1,$$

restent invariables par le changement de s *en* $1-s$.

33 *Conséquences relatives aux racines de ξ_1 et ξ_2.* — Les formules (5) et (6) qui lient les fonctions ξ_1 et ξ_2 à Z prouvent, puisque la fonction Γ ne peut pas s'annuler, que ξ_1 et ξ_2 ne peuvent avoir d'autres racines que celles de Z.

L'expression de $Z(s, \chi)$ en produit infini

$$Z(s, \chi) = \Pi \left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1},$$

convergent pour $\Re(s) > 1$, prouve que $Z(s, \chi)$ ne peut avoir de racines dont la partie réelle surpasse l'unité. Donc, en premier lieu, les fonctions ξ_1 et ξ_2 ne peuvent avoir de racines dont la partie réelle surpasse l'unité. Mais, d'autre part, les formules (8) ou (9) montrent que si s est racine de $\xi_1(s, \chi)$ ou $\xi_2(s, \chi)$, $(1 - s)$ sera racine de $\xi_1\left(s, \frac{1}{\chi}\right)$ ou $\xi_2\left(s, \frac{1}{\chi}\right)$; donc, en vertu de la conclusion précédente, s ne peut avoir non plus sa partie réelle négative. De là la conclusion suivante :

Si les fonctions ξ_1 et ξ_2 ont des racines, ce sont nécessairement des racines de Z, et ces racines ont leur partie réelle comprise entre 0 et + 1 (limites non exclues jusqu'à présent).

Nous allons démontrer au paragraphe suivant que ces racines existent effectivement.

§ 4. — *Genre des fonctions ξ_1, ξ_2 et Z. Racines de ces fonctions.*

34. Pour déterminer le genre de ces fonctions, nous allons employer encore une fois la méthode de M. Hadamard, dont nous avons déjà fait connaître les principes au chapitre Ier, § 3. Au lieu d'appliquer simplement les théorèmes déjà démontrés, nous allons reproduire certaines démonstrations qui conduisent, dans dans le cas actuel, à des résultats un peu plus précis.

Développements de ξ_1 et ξ_2 par la formule de Maclaurin. — Les fonctions entières ξ_1 et ξ_2 peuvent se développer par la formule de Maclaurin dans toute l'étendue du plan sous la forme

$$\xi_1(s, \chi) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n + \cdots,$$
$$\xi_2(s, \chi) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_n s^n + \cdots.$$

Les coefficients du développement se déduisent directement des formules (4^a) et (7^a) du paragraphe précédent, et peuvent se calculer par les formules

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\int_1^\infty \Psi_1(x, \chi)(lx)^n \frac{dx}{x}\right.$$
$$\left. + (-1)^n \varepsilon_1(\chi)\int_1^\infty \Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right)(lx)^n \frac{dx}{\sqrt{x}}\right],$$

$$b_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\frac{1}{1.2\ldots n}\left[\int_1^\infty \Psi_1(x, \chi)(lx)^n \frac{dx}{\sqrt{x}}\right.$$
$$\left. + (-1)^n \varepsilon_2(\chi)\int_1^\infty \Psi_2\left(x, \frac{1}{\chi}\right)(lx)^n dx\right].$$

On remarque que les deux quantités

$$\Psi_1(x, \chi)\ \frac{1}{x} + (-1)^n \varepsilon_1(\chi)\, \Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right)\frac{1}{\sqrt{x}},$$
$$\Psi_2(x, \chi)\frac{1}{\sqrt{x}} + (-1)^n \varepsilon_2(\chi)\, \Psi_2\left(x, \frac{1}{\chi}\right).$$

ne diffèrent respectivement des deux quantités

$$2(-1)^n \varepsilon_1(\chi) e^{-\frac{\pi x}{p}} \frac{1}{\sqrt{x}},$$
$$2(-1)^n \varepsilon_2(\chi) e^{-\frac{\pi x}{p}},$$

que par un facteur qui tend vers l'unité quand x augmente indéfiniment. On peut donc appliquer la remarque du n° 14 et poser, en désignant en général par η une quantité qui tend vers zéro pour n infini, les expressions asymptotiques

$$a_n = (-1)^n \varepsilon_1(\chi)\frac{1}{2^n n!}\left[(1+\eta)ln\right]^n,$$

$$b_n = (-1)^n \varepsilon_2(\chi)\frac{1}{2^n n!}\left[(1+\eta)ln\right]^n.$$

35. Les formules précédentes font connaître la loi de décroissance des coefficients a_n et b_n. On peut, comme au n° 16, en déduire le genre de la fonction par la méthode de M. Hadamard. On conclut immédiatement de la comparaison des formules que *les fonctions* $\xi_1(s, \chi)$ *et* $\xi_2(s, \chi)$ *sont du genre zéro ou du genre un.*

Il est également très important de connaître la loi de croissance des modules des racines successives

$$\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m, \ldots$$

de l'une ou de l'autre de ces fonctions supposées rangées par ordre de modules croissants. La démonstration du n° 17 s'applique encore et nous permet d'énoncer d'abord le théorème suivant :

La série

$$\sum_m \frac{1}{(\text{mod } \rho_m)^k},$$

étendue à toutes les racines de la fonction $\xi_1(s, \chi)$, *si* $\chi(-1) = 1$, *ou* $\xi_2(s, \chi)$, *si* $\chi(-1) = -1$, *à supposer que ces racines soient en nombre illimité, sera convergente, pourvu que* k *soit supérieur à l'unité.*

Le théorème précédent ne suffit pas pour établir l'existence des racines ρ. Il faudrait en outre trouver une limite inférieure du module de ρ_m. On pourrait obtenir ce résultat comme il suit :

Supposons $\chi(-1) = 1$. Posons alors

$$s = \frac{1}{2} + ti,$$

et considérons la fonction

$$\xi_1\left(\frac{1}{2} + ti, \chi\right) \xi_1\left(\frac{1}{2} + ti, \frac{1}{\chi}\right),$$

qui, en vertu de la remarque du n° 32, sera une fonction paire de t. On peut, avec un peu d'attention, raisonner sur cette fonction comme M. Hadamard raisonne sur la fonction $\xi(t)$ dans son

Mémoire, et montrer que cette fonction est du genre zéro en t^2. On déterminera ensuite avec exactitude la loi de croissance des modules de ses racines, qui est analogue à celle des racines de $\xi(t)$. Cette loi étant connue pour le produit

$$\xi_1(1 + ti, \chi)\, \xi_1\left(1 + ti, \frac{1}{\chi}\right),$$

l'est, par le fait même, pour chacun des facteurs séparément, parce que les racines de $\xi_1(s, \chi)$ sont les conjuguées de celles de $\xi_1\left(s, \frac{1}{\chi}\right)$.

36. Nous ne nous arrêterons pas cependant à faire cette démonstration, qui est assez longue, et nous nous contenterons d'établir, par la méthode la plus simple possible, le résultat suivant :

Les fonctions $\xi_1(s, \chi)$ et $\xi_2(s, \chi)$ sont du genre un et non du genre zéro, et elles admettent une infinité de racines ρ. La loi de croissance des modules de ces racines est telle que la série

$$\sum \frac{1}{\operatorname{mod} \rho}$$

ne peut pas être convergente.

Pour fixer les idées, supposons $\chi(-1) = 1$ et raisonnons sur la fonction $\xi_1(s, \chi)$. Le développement de $\xi_1(s, \chi)$ en facteurs primaires ne peut renfermer que des facteurs exponentiels de la forme $e^{\alpha s}$ et des facteurs de la forme $\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$, puisque la fonction n'est pas d'un genre supérieur au premier (35). Les facteurs exponentiels doivent même disparaître si la fonction est du genre zéro; mais on peut comprendre ce cas dans le précédent, en admettant que les coefficients α peuvent être nuls.

Si, par impossible, la série $\Sigma \frac{1}{\rho_m}$ était absolument convergente, on pourrait, dans le développement en facteurs primaires, grouper séparément les facteurs de la forme $\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ en produit absolument convergent, et par suite grouper aussi séparément les expo-

nentielles. On obtiendrait ainsi un résultat de la forme

$$\xi_1(s, \chi) = \xi_1(0, \chi)\, e^{\alpha s} \Pi \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

d'où

$$D \log \xi_1(s, \chi) = \alpha + \sum \frac{1}{s - \rho},$$

et le second membre conserverait une valeur finie quand s tend vers l'infini positif, toutes les racines ρ ayant leur partie réelle inférieure à l'unité (33).

Mais, d'autre part, je vais montrer que le premier membre augmente indéfiniment quand s tend vers l'infini positif. On a, en effet (30),

$$\xi_1(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z(s, \chi),$$

d'où

$$D \log \xi_1(s, \chi) = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\pi}{p}\right) + D \log \Gamma \left(\frac{s}{2}\right) + \log Z(s, \chi).$$

L'expression de Z en produit infini (28) donne

$$D \log Z(s, \chi) = \sum_q \frac{\chi(q) lq}{q^s - \chi(q)}.$$

Ce terme tend donc vers zéro, quand s tend vers l'infini positif, tandis que $D \log \Gamma \left(\frac{s}{2}\right)$ augmente indéfiniment avec s. Donc $D \log \xi_1(s, \chi)$ augmente aussi indéfiniment. La série $\Sigma \frac{1}{s - \rho}$ ne peut pas être convergente et le théorème est établi.

Le même raisonnement s'applique à $\xi_2(s, \chi)$ si $\chi(-1) = -1$. En résumant donc les résultats énoncés aux n°s 33 et 36, on a le théorème suivant :

37. *La fonction* $\xi_1(s, \chi)$ *si* $\chi(-1) = 1$ *et la fonction* $\xi_2(s, \chi)$ *si* $\chi(-1) = -1$, *sont des fonctions du premier genre ayant une infinité de racines dont la partie réelle est comprise entre zéro et un.*

La fonction $Z(s, \chi)$, qui s'exprime par un produit de trois fonctions du premier genre

$$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \xi_1(s, \chi), \quad \text{si} \quad \chi(-1) = 1,$$

$$\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \xi_2(s, \chi), \quad \text{si} \quad \chi(-1) = -1,$$

est donc aussi une fonction entière du premier genre.

CHAPITRE III.

Étude analytique des fonctions de Dirichlet dans le cas d'un module composé.

---

§ 1. — *Définition et propriétés des caractères* (mod. p^α) *dans le cas d'un nombre premier* p *impair.*

38. *Définition des caractères* (mod p^α). — Désignons par n un nombre quelconque premier à p et par g une racine primitive de la congruence

$$g^{p^{\alpha-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}.$$

Soit ν l'indice du nombre n, c'est-à-dire un nombre vérifiant la congruence

(1) . . . . . $g^\nu \equiv n \pmod{p^\alpha}$.

Représentons par ω une racine quelconque de l'équation

(2) . . . . . $\omega^{p^{\alpha-1}(p-1)} = 1$.

La quantité

$$\chi(n, \bmod p^\alpha) = \omega^\nu$$

est ce que nous appellerons un caractère du nombre n (mod p^α). Nous représenterons d'ailleurs ce caractère par $\chi(n)$ quand aucune confusion ne sera possible.

On forme des caractères différents en remplaçant les unes par les autres les différentes racines des équations (2). Ces racines peuvent s'exprimer comme puissances successives d'une racine primitive ω_1 :

$$1, \omega_1, \omega_1^2, \ldots \omega_1^{p^{\alpha-1}(p-1)-1},$$

et leur nombre, qui est celui des caractères différents, est égal à $p^{\alpha-1}(p-1)$. Nous représenterons ce nombre, suivant l'usage, par $\varphi(p^\alpha)$.

L'équation (2) n'a que deux racines réelles $+1$ et -1 ; toutes les autres sont imaginaires, mais leur module est égal à l'unité.

On donne le nom de *caractère principal* à celui qui est formé avec la racine $\omega = 1$; il est égal à l'unité pour tous les nombres. En dehors du précédent, il n'y en a qu'un seul qui soit réel pour tous les nombres n : c'est celui qui correspond à la racine $\omega = -1$. Il est égal à $\left(\frac{n}{p}\right)$, ce symbole représentant, d'après Legendre, le caractère quadratique de n (mod p).

Nous donnerons à tous les autres caractères le nom de *caractères imaginaires*. Ceux-ci sont conjugués deux à deux, comme les racines qui servent à les former, de sorte qu'à tout caractère $\chi(n)$ formé avec la racine ω correspond un caractère conjugué ou opposé, que nous représenterons par les notations

$$\frac{1}{\chi(n)} = \frac{1}{\chi}(n),$$

et qui est formé avec la racine $\frac{1}{\omega}$ conjuguée de la première. S'il y a lieu de les distinguer entre eux, nous représenterons encore les différents caractères par

$$\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots$$

et nous conviendrons que χ_0 représente le caractère principal.

Enfin, pour un caractère χ_h quelconque, formé avec la racine $\omega_1{}^h$, on a

$$\chi_h(-1) = \omega_1^{h\frac{p-1}{2}} = (-1)^h.$$

Le caractère $\chi(-1)$ est donc égal à $+1$ ou -1 suivant que la racine ω qui sert à le former est une puissance paire ou impaire de la racine primitive ω_1.

39. Les caractères ainsi définis jouissent encore des quatre propriétés fondamentales correspondant à celles du n° 21, savoir :

1° Pour deux nombres quelconques n et n' premiers avec p, on a

$$\chi(n)\chi(n') = \chi(nn');$$

2° Si $n \equiv n' \pmod{p^\alpha}$, on a

$$\chi(n) = \chi(n');$$

3° La somme Σ s'étendant à tous les nombres inférieurs à p^α et premiers à p, on a, dans le cas du caractère principal,

$$\sum_n \chi_0(n) = \varphi(p^\alpha),$$

et pour tout autre caractère,

$$\sum_n \chi(n) = 0;$$

4° La somme $\mathcal{S}$ s'étendant à la totalité des caractères, on a, pour un nombre n quelconque,

$$\mathop{\mathcal{S}}_{\chi} \chi(n) = 0,$$

sauf cependant si

$$n \equiv 1 \pmod{p^\alpha},$$

et, dans ce cas,

$$\mathop{\mathcal{S}}_{\chi} \chi(n) = \varphi(p^\alpha).$$

40. *Subdivision des caractères en trois classes.* — Dans le cas d'un nombre premier, nous n'avions subdivisé les caractères qu'en deux classes. Ici nous rencontrons une classe de plus :

La *première classe* renfermera le caractère principal seulement, comme dans le cas d'un module premier.

La *deuxième classe* renfermera les *caractères impropres* (mod p^α). Nous appellerons ainsi ceux qui sont en même temps des caractères (mod $p^{\alpha-\lambda}$), en désignant par $p^{\alpha-\lambda}$ une puissance de p inférieure à p^α.

Pour que cette circonstance se présente, il faudra que le caractère χ soit formé avec une racine ω de l'équation

$$\omega^{p^{(\alpha-1)}(p-1)} = 1$$

qui soit en même temps racine de

$$\omega^{p^{\alpha-\lambda-1}(p-1)} = 1.$$

Si l'on désigne donc par ω_1 une racine primitive de la première équation, il faudra qu'on ait

$$\omega = \omega_1^{\mu p^\lambda}.$$

Le nombre des valeurs distinctes de ω fournies par cette équation est $(\alpha - 1)(p - 1)$. Mais, comme nous excluons de la classe actuelle le caractère principal, on voit que le nombre des caractères impropres (mod p^α) se réduit à $(\alpha - 1)(p - 1) - 1$.

On remarquera encore que la classe qui nous occupe renfermera toujours le caractère réel formé avec la racine $\omega = -1$, car celui-ci étant égal à $\left(\frac{n}{p}\right)$ est aussi un caractère (mod p).

Enfin, la *troisième classe* renfermera tous les autres caractères, que nous appellerons les *caractères propres* (mod p^α).

D'après les définitions précédentes, un caractère impropre (mod p^α) sera un caractère propre pour un module convenable $p^{\alpha-\lambda}$. D'ailleurs, les nombres n premiers à $p^{\alpha-\lambda}$ et à p^α sont les mêmes, sauf pour $\alpha - \lambda = 0$. Si donc nous laissons de côté le caractère principal, sur lequel nous reviendrons plus tard, on

voit que nous pouvons nous borner à étudier le cas d'un caractère propre (mod p^α).

On a le théorème général suivant :

41. Théorème. — *Soient, d'une part,* $\delta = p^{\alpha-\lambda}$ *et* $\Delta = p^\lambda$ *deux puissances de* p; *d'autre part,* a *et* A *deux nombres premiers à* p. *Soit ensuite* l *un nombre qui passe par toutes les valeurs de* 0 *à* $\delta - 1$. *Je dis que l'on a, dans le cas d'un caractère propre* (mod p^α = mod $\delta\Delta$),

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + lA\Delta, \text{mod } \delta\Delta) = 0.$$

En effet, les δ nombres premiers à p :

$$a, \quad a + A\Delta, \quad a + 2A\Delta, \ldots a + (\delta - 1)A\Delta,$$

sont congrus entre eux (mod Δ = mod p^λ); d'autre part, ils sont incongrus entre eux (mod $\delta\Delta$ = mod p^α), car si l'on avait

$$lA\Delta \equiv l'A\Delta \ (\text{mod } \Delta\delta),$$

on en tirerait (A étant premier à Δ)

$$l \equiv l' \ (\text{mod } \delta),$$

ce qui est impossible pour l et $l' < \delta$.

Désignons donc les δ indices de ces nombres par

$$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{\delta-1};$$

ces indices seront congrus entre eux [mod $p^{\lambda-1}(p-1)$] et incongrus [mod $p^{\alpha-1}(p-1)$]. La suite précédente doit donc être, à l'ordre près, équivalente [mod $p^{\alpha-1}(p-1)$] à la suivante :

$$\nu_0, \quad \nu_0 + p^{\lambda-1}(p-1), \quad \nu_0 + 2p^{\lambda-1}(p-1), \ldots \nu_0 + (\delta-1)p^{\lambda-1}(p-1),$$

qui est la seule distincte possédant les deux propriétés indiquées.

Posons donc, en abrégé,

$$\omega^{p^{\lambda-1}(p-1)} = \omega_1;$$

il viendra

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + lA\Delta, \bmod \delta\Delta) = \omega_1^{\nu_0}\left[1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \cdots + \omega_1^{\delta-1}\right],$$

et le second membre se met sous la forme

$$\omega_1^{\nu_0}\frac{\omega_1^{\delta} - 1}{\omega_1 - 1}.$$

Le dénominateur $(\omega_1 - 1)$ ne peut s'annuler pour un caractère propre, par définition; d'autre part, le numérateur est nul, car

$$\omega_1^{\delta} - 1 = \omega^{p^{\alpha-1}(p-1)} - 1 = 0;$$

donc le théorème est établi.

§ 2. — *Définition et propriétés des caractères* (mod 2^c).

42. *Définition des caractères* (mod 2^c). — Il n'y a pas de caractères (mod 2); nous supposerons donc, dans ce qui suit, $c > 1$.

Pour tout nombre impair n, on peut poser

$$n \equiv (-1)^{\alpha} 5^{\lambda} (\bmod 2^c),$$

où α est un des nombres $(0, 1)$ et λ un des nombres $(0, 1, 2, \ldots 2^{c-2} - 1)$. A tout nombre n correspondent deux nombres α et λ, déterminés d'une manière unique et qu'on appelle les indices de n (mod 2^c).

Dans le cas particulier où c est égal à 2 et le module à 4, on pose simplement

$$n \equiv (-1)^{\alpha} (\bmod 4),$$

et les considérations relatives au nombre 5 peuvent être supprimées. Mais ce cas peut être considéré comme rentrant dans le cas général, car $(c - 2)$ étant nul, λ est nécessairement nul, et le nombre 5 ne joue aucun rôle dans le caractère défini précé-

demment. Les considérations que nous allons développer pour le cas général s'appliqueront donc encore pour $c = 2$.

Désignons par θ et η des racines respectivement des deux équations

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \theta^2 = 1, \quad \eta^{2^{c-2}} = 1;$$

on dit que la quantité

$$\chi(n, \bmod 2^c) = \theta^\alpha \eta^\lambda$$

est un caractère du nombre n (mod 2^c). Nous le désignerons encore simplement par $\chi(n)$ si aucune confusion n'est possible.

On forme encore des caractères différents en substituant les unes aux autres les différentes racines des équations (2). Le nombre de ces caractères différents est donc encore égal à $\varphi(2^c) = 2^{c-1}$.

On appelle *caractère principal* celui qui est formé avec les racines $\theta = 1, \eta = 1$. Tous les autres caractères ont encore leur module égal à l'unité. Parmi ceux-ci, il y en a encore trois qui sont réels pour tous les nombres n; ce sont ceux qui sont formés avec les racines

$$(\theta = 1, \eta = -1), \quad (\theta = -1, \eta = 1), \quad (\theta = -1, \eta = -1).$$

Comme antérieurement, nous donnerons aux autres caractères le nom de *caractères imaginaires* et à ceux-ci le nom de *caractères réels*.

On reconnaît sans peine que les caractères (mod 2^c) jouissent des quatre propriétés fondamentales analogues à celles des n°s 21 et 39. Il est inutile de les transcrire encore une fois.

Enfin, le nombre (-1) ayant pour indices $(\alpha = 1, \lambda = 0)$, le caractère $\chi(-1, \bmod 2^c)$ sera égal à $(+1)$ ou à (-1) suivant qu'il sera formé avec la racine $\theta = +1$ ou $\theta = -1$ de l'équation $\theta^2 = 1$.

43. *Subdivision des caractères en trois classes.* — Nous avons à reproduire ici les mêmes distinctions qu'au paragraphe précé-

dent. Nous partageons les caractères (mod 2^c) en trois classes :

La *première classe* renferme le caractère principal seulement.

La *deuxième classe* renferme les *caractères impropres* (mod 2^c). Ce sont ceux qui sont formés avec une racine η de l'équation

$$\eta^{2^{c-2}} = 1,$$

qui est en même temps racine de l'équation

$$\eta^{2^{c-j-2}} = 1,$$

de degré moindre. Ces caractères-là sont aussi des caractères (mod 2^{c-j}) et j est compris entre 0 et c (limites exclues).

La *troisième classe* renferme les caractères propres (mod 2^c). Ce sont tous les autres.

Remarques. — Si $c = 2$, les caractères (mod 4) sont formés avec les seules racines de $\theta^2 = 1$. Il n'y a que deux caractères. L'un est le caractère principal ; l'autre est un caractère propre, qui est réel.

Si $c = 3$, la seconde des équations (2) devient

$$\eta^2 = 1,$$

de sorte que les caractères (mod 8) sont encore tous réels.

Ils correspondent aux combinaisons de racines

$$(\eta = 1, \theta = 1), \quad (\eta = 1, \theta = -1), \quad (\eta = -1, \theta = 1), \quad (\eta = -1, \theta = -1).$$

La première combinaison donne le caractère principal; la seconde, un caractère impropre (mod 8), car c'est un caractère (mod 4); les deux dernières donnent des caractères propres (mod 8).

Enfin, pour une puissance de 2 supérieure à 8, tous les caractères propres sont imaginaires.

44. On peut étendre au cas actuel le théorème du n° 41.

Théorème. — *Soient, d'une part,* $\delta = 2^{c-j}$ *et* $\Delta = 2^j$ *deux puis-*

sances de 2; *d'autre part,* a *et* A *deux nombres impairs. Soit ensuite* l *un nombre qui passe par toutes les valeurs entières de* 0 *à* $\delta - 1$; *je dis que l'on a, dans le cas d'un caractère propre* (mod $\Delta\delta$ = mod 2^c),

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod \delta\Delta) = 0.$$

La conclusion est immédiate si $\Delta = 2$, car, dans ce cas, $(a + l\,\mathrm{A}\Delta)$ représente successivement tous les résidus impairs (mod 2^c), et la somme précédente s'annule en vertu d'une des quatre propriétés générales des caractères.

Supposons donc $j > 1$. Les nombres

$$a, \quad a + \mathrm{A}\Delta, \quad a + 2\mathrm{A}\Delta, \ldots a + (\delta - 1)\,\mathrm{A}\Delta$$

sont congrus entre eux (mod Δ = mod 2^j) et incongrus (mod $\delta\Delta$ = mod 2^c). Si l'on désigne donc leurs indices (mod 2^c) par les suites

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \alpha_{\delta-1};$$
$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots \lambda_{\delta-1},$$

les indices α seront congrus entre eux (mod 2); en outre, les indices λ seront congrus entre eux (mod 2^{j-2}) et incongrus (mod 2^{c-2}). La suite des indices λ est donc équivalente (mod 2^{c-2}) à la suite

$$\lambda_0, \quad \lambda_0 + 2^{j-2}, \quad \lambda_0 + 2.2^{j-2} \ldots \lambda_0 + (\delta - 1)2^{j-2},$$

en ne tenant pas compte de l'ordre des termes. Par conséquent, si l'on pose en abrégé

$$\eta_1 = \eta^{2^{j-2}},$$

il viendra

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod \delta\Delta) = \theta^{\alpha_0}\eta^{\lambda_0}\left[1 + \eta_1 + \eta_1^2 + \cdots \eta^{\delta-1}\right]$$

$$= \theta^{\alpha_0}\eta^{\lambda_0}\frac{\eta_1^{\delta} - 1}{\eta_1 - 1} = 0,$$

parce que $(\eta_1 - 1)$ est, par définition, différent de zéro pour un caractère propre, tandis que le numérateur

$$\eta_1^{\delta} - 1 = \eta^{c\ 2} - 1 = 0.$$

Le théorème est donc établi.

§ 3. — *Définition et propriétés des caractères* (mod M), *pour un module* M *quelconque.*

45. *Définition des caractères* (mod M). — Décomposons M en ses facteurs premiers

$$M = 2^c p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots.$$

Soit ensuite n un nombre premier à M. On appelle caractère de n (mod M) le produit des caractères de n selon les modules respectifs 2^c, $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, ... auxquels nous donnerons le nom de *modules composants*. On a, donc par définition,

$$\chi(n, \text{mod } M) = \chi(n, \text{mod } 2^c)\chi(n, \text{mod } p_1^{\alpha_1}) \ldots.$$

Dans le cas où $c = 1$, comme il n'y a pas de caractère (mod 2), on supprime le premier facteur au second membre, comme dans le cas où M est impair.

Le *caractère principal* est celui qui est formé du produit des caractères principaux selon tous les modules composants 2^c, $p_1^{\alpha_1}$, ... Nous le désignerons par χ_0. Tous les caractères ont leur module égal à l'unité et leur nombre est égal à $\varphi(M)$, en représentant, comme d'habitude, par φ l'indicateur de Gauss.

Pour un caractère χ quelconque, on a

$$\chi(-1, \text{mod } M) = \pm 1,$$

puisqu'il en est ainsi pour les modules composants.

46. Les caractères (mod M) jouissent des cinq propriétés suivantes :

1° Pour deux nombres n et n' premiers à M, on a

$$\chi(n)\chi(n') = \chi(nn');$$

2° Si $n \equiv n'$ (mod M), on a la relation

$$\chi(n) = \chi(n').$$

3° La somme Σ' s'étendant à tous les nombres premiers à M et inférieurs à M, on a, dans le cas du caractère principal,

$$\sum_n{}' \chi_0(n) = \varphi(M),$$

et pour tout autre caractère,

$$\sum_n{}' \chi(n) = 0:$$

4° La somme S s'étendant à la totalité des caractères, on a, pour tout nombre n premier à M,

$$\underset{\chi}{S}\,\chi(n) = 0,$$

sauf si $n \equiv 1$ (mod M), auquel cas

$$\underset{\chi}{S}\,\chi(n) = \varphi(M).$$

5° Si M et M' sont deux nombres premiers entre eux et premiers à n, on a

$$\chi(n, \text{mod } MM') = \chi(n, \text{mod } M)\chi(n, \text{mod } M')$$

46. *Subdivision des caractères en quatre classes.* — Dans le cas où M est un nombre composé, les caractères (mod M) doivent se partager en quatre classes, comme il suit :

La *première classe* renferme le *caractère principal.*

La *deuxième classe* renferme les caractères formés avec des caractères principaux suivant une partie seulement des modules composants. Nous donnerons à ces caractères le nom de *caractères incomplets* (mod M).

Nous rangerons dans la *troisième classe* les *caractères impropres* (mod M). Ce sont ceux qui ne renferment dans leur composition aucun caractère principal par rapport aux modules composants, mais un ou plusieurs caractères impropres.

Enfin nous rangerons dans la *quatrième classe* les *caractères propres* (mod M). Ce sont ceux qui sont exclusivement formés de caractères propres suivant tous les modules composants.

Les caractères des deux premières classes doivent exiger des considérations spéciales. Mais l'étude des caractères impropres (mod M) se ramène immédiatement à celle des caractères propres. En effet, tout caractère impropre (mod M) est un caractère propre (mod M′), en désignant par M′ un diviseur de M qui contient tous les mêmes facteurs premiers et qui est, par conséquent, premier avec tous les mêmes nombres.

47. On a encore le théorème suivant, qui généralise ceux des n°s 41 et 44.

Théorème. — *Soient, d'une part,* Δ *et* δ *deux nombres formés des mêmes facteurs premiers; de l'autre,* a *et* A *deux nombres premiers avec les précédents. Soit ensuite* l *un nombre qui passe par toutes les valeurs entières de* 0 *à* $\delta - 1$; *je dis que l'on a, dans le cas d'un caractère propre* (mod $\delta\Delta$),

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + lA\Delta, \bmod \delta\Delta) = 0.$$

Si les nombres Δ et δ ne renferment qu'un seul facteur premier, le théorème a été démontré antérieurement [(41) et (44)]. Nous pouvons donc supposer maintenant que ces nombres renferment plusieurs facteurs premiers. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'ils en renferment trois seulement, p_1, p_2, p_3, mais la démonstration sera générale. Posons donc (p_1 pouvant être égal à 2)

$$\Delta = p_1^{\lambda} p_2^{\mu} p_3^{\nu},$$

$$\delta = p_1^{\alpha-\lambda} p_2^{\beta-\mu} p_3^{\gamma-\nu}.$$

On attribuera à l toutes les valeurs que cette quantité doit prendre dans la somme considérée, en posant

$$l = k_1 + k_2 p_1^{\alpha-\lambda} + k_3 p_1^{\alpha-\lambda} p_2^{\beta-\mu},$$

et en donnant à k_1, k_2, k_3 tous les systèmes de valeurs compris dans le tableau

$$k_1 = 0, 1, 2, \ldots (p_1^{\alpha-\lambda} - 1),$$
$$k_2 = 0, 1, 2, \ldots (p_2^{\beta-\mu} - 1),$$
$$k_3 = 0, 1, 2, \ldots (p_3^{\gamma-\nu} - 1).$$

Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que, pour tout système particulier de valeurs de k_1 et de k_2, la somme étendue à toutes les valeurs de k_3

$$\sum \chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod \delta\Delta) = 0.$$

Comme on a

$$\delta\Delta = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma},$$

le caractère $\chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod \delta\Delta)$ est égal au produit de deux autres (45, 5°)

$$\chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod p_1^{\alpha} p_2^{\beta})\chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod p_3^{\gamma}).$$

Le premier de ces deux caractères ne varie pas avec k_3 (45, 2°) ; nous sommes donc ramenés à montrer que la somme

$$\sum_{k_3} \chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod p_3^{\gamma})$$

est égale à zéro. Posons, pour simplifier,

$$\Delta' = p_3^{\nu}, \qquad \mathrm{A}' = \mathrm{A} p_1^{\alpha} p_2^{\beta},$$
$$\delta' = p_3^{\gamma-\nu}; \quad a' = a + (k_1 + k_2 p_1^{\lambda})\mathrm{A}\Delta;$$

cette dernière somme pourra s'écrire sous la forme

$$\sum_{l=0}^{\delta'-1} \chi(a' + l\mathrm{A}'\Delta', \bmod \delta'\Delta'),$$

et elle s'annulera par le théorème du n° 41.

§ 4. — *Définition et propriétés des fonctions* $\Psi_1(x, \chi \bmod M)$ *et* $\Psi_2(x, \chi \bmod M)$ *dans le cas d'un caractère propre* (mod M).

48. Les fonctions qui vont nous occuper renferment, comme cas particulier, celles qui ont été définies au n° 23. Les développements que nous avons donnés alors nous permettront d'abréger un peu les démonstrations du paragraphe actuel.

Nous poserons comme première définition

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi \bmod M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}, \\ \Psi_2(x, \chi \bmod M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}. \end{cases}$$

Dans ces sommes, on doit donner successivement à n toutes les valeurs entières positives et négatives premières avec M. Les sommes sont alors absolument convergentes, pourvu que x soit positif.

On reconnaît, comme au n° 22, qu'il y a deux cas à distinguer :

1° Si $\chi(-1, \bmod M) = 1$, on a

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}, \\ \Psi_2(x, \chi) = 0; \end{cases}$$

2° Si $\chi(-1, \bmod M) = -1$, on a

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = 0, \\ \Psi_2(x, \chi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi(n) n e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}. \end{cases}$$

On n'a donc à étudier la fonction Ψ_1 que si $\chi(-1) = 1$ et la fonction Ψ_2 que si $\chi(-1) = -1$.

49. *Étude de* $\Psi_1(x, \chi)$ *quand* $\chi(-1) = 1$. On trouve, comme au n° 23, la relation

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_1(x, \chi \bmod M) = \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \psi_1\left(\frac{k}{M}, Mx\right).$$

Dans la somme Σ', il faut donner à k toutes les valeurs premières à M et inférieures à M. C'est pour cela que nous avons accentué cette somme.

Enfin, en transformant, comme au n° 23, le second membre de l'équation (4), il vient

$$(5) \qquad \Psi_1(x, \chi \bmod \mathrm{M}) = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{M}x}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\frac{n^2\pi}{\mathrm{M}x}} \sum_{k=1}^{\mathrm{M}}{}' \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{\mathrm{M}} \right].$$

Mais la somme

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{M}}{}' \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{\mathrm{M}}$$

s'évalue encore aisément.

1° Si n et M ne sont pas premiers entre eux, je vais montrer que cette somme est nulle, dans l'hypothèse d'un caractère propre (mod M) dans laquelle nous nous sommes placés.

Si n est un multiple de M, la somme se réduit à

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{M}}{}' \chi(k),$$

et la conclusion est immédiate (45, 3°)

Occupons-nous donc du cas plus difficile où n et M ont un plus grand facteur commun d différent de M.

Posons, n' et M' étant premiers entre eux,

$$\mathrm{M} = d\mathrm{M}', \quad n = dn'.$$

Il viendra, en groupant les termes dont les cosinus ont la même valeur,

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{M}}{}' \chi(k) \cos \frac{2kn\pi}{\mathrm{M}} = \sum_{k=1}^{\mathrm{M}'}{}' \left[\cos \frac{2kn'\pi}{\mathrm{M}'} \sum_{m=0}^{d}{}' \chi(k + m\mathrm{M}') \right].$$

Dans la somme intérieure

$$\sum_{m=0}^{d}{}' \chi(k + m\mathrm{M}'),$$

m prend toutes les valeurs inférieures à d, pour lesquelles $(k + m\mathrm{M}')$ est premier avec M. Pour établir le théorème, il suffit évidemment de démontrer que cette dernière somme est nulle pour toutes les valeurs de k.

A cet effet, posons

$$\left.\begin{array}{r} d = \delta d_1 \\ \mathrm{M}' = \Delta \mathrm{M}_1 \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{M} = \delta\Delta d_1 \mathrm{M}_1,$$

Δ et δ étant formés de la réunion des facteurs premiers qui sont communs à d et M'; d_1 de la réunion de ceux de d qui ne divisent pas M', et M_1 de la réunion de ceux de M qui ne divisent pas d. De la sorte, δ et Δ renferment les mêmes facteurs premiers, et les trois nombres $(\delta\Delta)$, d_1 et M_1 sont premiers entre eux deux à deux.

Comme les nombres qui sont premiers à M sont les mêmes que ceux qui le sont à $\mathrm{M}'d_1$, on attribuera à m toutes les valeurs que cette quantité prend dans la somme qui nous occupe, en posant

$$m = n + ld_1,$$

puis, en donnant dans le second membre à n toutes les valeurs inférieures à d_1 pour lesquelles $(k + n\mathrm{M}')$ est premier à M, ensuite à l toutes les valeurs de 0 à $(\delta - 1)$.

On a ainsi

$$\sum_m \chi(k + m\mathrm{M}') = \sum_n \sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(k + m\mathrm{M}').$$

Il suffit maintenant de montrer qu'on a, pour toute valeur particulière de n,

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(k + m\mathrm{M}', \bmod \mathrm{M}) = 0.$$

C'est bien ce qui a lieu, car, comme $\mathrm{M} = (\delta\Delta)\, d_1\, \mathrm{M}_1$, le caractère (mod M) est un produit de trois autres, qui correspondent aux trois facteurs premiers entre eux de M.

Deux de ces caractères, savoir

$$\chi(k + m\mathrm{M}', \bmod d_1),$$
$$\chi(k + m\mathrm{M}', \bmod \mathrm{M}_1),$$

sont invariables dans la somme par rapport à l, écrite en dernier lieu. Quant à la somme des troisièmes :

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(k + (n + ld_1)\mathrm{M}', \bmod \delta\Delta),$$

où l'on posera, en abrégé,

$$k + n\mathrm{M}' = a,$$
$$ld_1\mathrm{M}' = ld_1\mathrm{M}_1\Delta = l\mathrm{A}\Delta,$$

elle se mettra sous la forme :

$$\sum_{l=0}^{\delta-1} \chi(a + l\mathrm{A}\Delta, \bmod \delta\Delta),$$

et elle s'annule par le théorème du n° 47. Notre conclusion (1°) est donc établie ;

2° Si n et M sont premiers entre eux, on a

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{M}}{}' \chi(k) \cos\frac{2kn\pi}{\mathrm{M}} = \frac{1}{\chi(n)} \sum_{k=1}^{\mathrm{M}}{}' \chi(kn) \cos\frac{2kn\pi}{\mathrm{M}}.$$

Mais quand k varie, le produit kn représente, en même temps que k, le système complet des résidus (mod M) qui sont premiers à M. Posons donc

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tau_1(\chi) = \sum_{k=1}^{\mathrm{M}}{}' \chi(k) \cos\frac{2k\pi}{\mathrm{M}};$$

on aura, quel que soit n premier avec M,

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{M}}{}' \chi(k) \cos\frac{2kn\pi}{\mathrm{M}} = \frac{1}{\chi(n)} \tau_1(\chi).$$

En substituant ces valeurs dans la formule (5), il vient

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_1(x, \chi \bmod M) = \frac{\tau_1(\chi)}{\sqrt{Mx}} \Psi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

En posant, pour simplifier,

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tau_1(\chi) = \varepsilon_1(\chi)\sqrt{M},$$

on trouve la relation fonctionnelle

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_1(x, \chi \bmod M) = \varepsilon_1(\chi) \frac{1}{\sqrt{x}} \Psi_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

On montre ensuite, comme au n° 23, que le module de $\varepsilon_1(\chi)$ est égal à l'unité. Cette quantité elle-meme serait égale à *un* si le caractère était réel.

50. *Étude de* $\Psi_2(x, \chi \bmod M)$ *quand* $\chi(-1) = -1$. On trouve d'abord, comme au n° 25,

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_2(x, \chi \bmod M) = M \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \psi_2\left(\frac{k}{M}, Mx\right),$$

puis, par la relation fonctionnelle que vérifie la fonction Ψ_2,

$$(11) \quad \Psi_2(x, \chi \bmod M) = \frac{2}{x\sqrt{Mx}} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2\pi}{Mx}} \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \sin\frac{2kn\pi}{M}.$$

Cette relation se simplifie comme dans le cas précédent.

1° Si n et M ne sont pas premiers entre eux,

$$\sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \sin\frac{2kn\pi}{M} = 0;$$

2° Si n est premier à M, on pose

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tau_2(\chi) = \sum_{k=1}^{M}{}' \chi(k) \sin\frac{2k\pi}{M};$$

on a alors

$$\sum_{k=1}^{M} \chi(k) \sin \frac{2kn\pi}{M} = \tau_2(\chi) \frac{1}{\chi(n)}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (11), on trouve

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_2(x, \chi \bmod M) = \frac{\tau_2(\chi)}{x\sqrt{Mx}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

On pose encore

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tau_2(\chi) = \varepsilon_2(\chi)\sqrt{M},$$

et on en déduit la relation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction Ψ_2 sous la forme définitive

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad \Psi_2(x, \chi \bmod M) = \varepsilon_2(\chi) \frac{1}{x\sqrt{x}} \Psi_2\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\chi}\right).$$

On montre enfin, comme au n° 25, que le module de $\varepsilon_2(\chi)$ est égal à l'unité. Ce facteur lui-même serait égal à un si le caractère était réel.

§ 5. — *Définition et propriétés des fonctions* $Z(s, \chi)$, $\xi_1(s, \chi)$ *et* $\xi_2(s, \chi)$ *dans le cas d'un caractère propre* (mod M).

51. Nous définirons la fonction $Z(s, \chi \bmod M)$, pour $\mathcal{R}(s) > 1$, par les expressions absolument convergentes

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad Z(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(n)}{n^s} = \Pi\left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1},$$

où n désigne successivement tous les nombres entiers premiers à M et q tous les nombres premiers qui ne divisent pas M.

L'expression de $Z(s, \chi)$ en produit infini montre que cette fonction ne peut s'annuler pour $\mathcal{R}(s) > 1$. Pour $\mathcal{R}(s) = 1$, le

produit cesse de converger : on ne peut donc pas affirmer, sans plus ample examen, que la fonction $Z(s, \chi)$ ne peut pas s'annuler pour des valeurs de s dont la partie réelle est égale à un. Nous ferons cette démonstration dans un chapitre ultérieur.

La série (1), au contraire, converge (mais non absolument) pour $\mathfrak{R}(s) > 0$. Nous n'insisterons pas sur cette circonstance qui ne nous servira pas, et nous allons, dans le paragraphe actuel, établir la relation fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction $Z(s, \chi \bmod M)$ dans le cas d'un caractère propre (mod M). Cette relation a été trouvée par M. Lipschitz, qui l'a obtenue directement (*). Il nous paraît plus simple de la rattacher aux propriétés des fonctions Ψ_1 et Ψ_2 du paragraphe précédent.

52. La fonction $Z(s, \chi)$, comme nous l'avons déjà vu au n° 29, jouit de propriétés très distinctes, suivant que $\chi(-1) = +1$ ou -1. Suivant l'un ou l'autre de ces deux cas, la fonction se ramène à la fonction Ψ_1 ou Ψ_2.

1° Si $\chi(-1) = 1$, on définit, comme au n° 30, une nouvelle fonction $\xi_1(s, \chi)$ par l'équation

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \xi_1(s, \chi \bmod M) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z(s, \chi),$$

qui ramène Z à ξ_1. Puis au moyen de la relation

$$\left(\frac{\pi}{M}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-n^2 \frac{\pi x}{M}} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

on trouve, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, par la formule (2) du paragraphe précédent (48),

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi_1(s, \chi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Psi_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

(*) *Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.* JOURNAL DE CRELLE, t. CV, 1889.

2° Si $\chi(-1) = -1$, on ramène la fonction Z à une nouvelle fonction $\xi_2(s, \chi)$ par la formule

$$(4) \quad . \quad . \quad \xi_2(s, \chi \bmod M) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) Z(s, \chi).$$

Puis, au moyen de la relation

$$\left(\frac{\pi}{M}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty n e^{-n^2 \frac{\pi x}{M}} x^{\frac{s-1}{2}} dx,$$

on trouve, pour $\mathcal{R}(s) > 1$, par la formule (3) du paragraphe précédent (48),

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \xi_2(s, \chi \bmod M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Psi_2(x, \chi) x^{\frac{s-1}{2}} dx.$$

53. Les formules (3) et (5) du numéro précédent, comme les formules correspondantes du n° 30, sont valables pour toute valeur de s et prouvent que ξ_1 et ξ_2 sont synectiques dans tout le plan. Mais pour mettre cette circonstance en évidence, il faut reproduire la transformation du n° 31. On trouve ainsi, eu égard aux formules (9) et (15) du paragraphe précédent :

1° Si $\chi(-1) = 1$,

$$(6) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1(s, \chi) = & \frac{1}{2} \int_1^\infty \Psi_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_1(\chi) \int_1^\infty \Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s+1}{2}} dx; \end{aligned} \right.$$

2° Si $\chi(-1) = -1$,

$$(7) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_2(s, \chi) = & \frac{1}{2} \int_1^\infty \Psi_2(x, \chi) x^{\frac{s-1}{2}} dx \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_2(\chi) \int_1^\infty \Psi_2\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s}{2}} dx. \end{aligned} \right.$$

54. Les deux formules précédentes mettent en évidence la propriété fonctionnelle des fonctions ξ_1 et ξ_2, comme on l'a vu encore au n° 31. On a

1° Si $\chi(-1)=1$,

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \xi_1(s,\chi)=\varepsilon_1(\chi)\,\xi_1\left(1-s,\frac{1}{\chi}\right);$$

2° Si $\chi(-1)=-1$,

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \xi_2(s,\chi)=\varepsilon_2(\chi)\,\xi_2\left(1-s,\frac{1}{\chi}\right),$$

d'où le théorème suivant :

Les fonctions $\xi_1(s,\chi)$ *si* $\chi(-1)=1$, *ou* $\xi_2(s,\chi)$ *si* $\chi(-1)=-1$, *se reproduisent respectivement, multipliées par un facteur indépendant de* s *et de module égal à un, par le changement simultané de* s *en* $(1-s)$ *et de* χ *en* $\frac{1}{\chi}$. *Dans le cas particulier d'un caractère* χ *réel, ces fonctions se reproduisent simplement par le changement de* s *en* $(1-s)$.

55. *Remarque.* — Ce résultat peut encore s'énoncer comme il suit : Si $\chi(-1)=1$, le produit

$$\xi_1(s,\chi)\,\xi_1\left(s,\frac{1}{\chi}\right);$$

ou, si $\chi(-1)=-1$, le produit

$$\xi_2(s,\chi)\,\xi_2\left(s,\frac{1}{\chi}\right),$$

demeurent invariables par le changement de s en $(1-s)$.

56. *Conséquences relatives aux zéros de* ξ_1 *et* ξ_2. — Les théorèmes précédents conduisent identiquement aux conclusions développées au n° 33 et que nous pouvons, par conséquent, nous contenter d'énoncer ici :

Si les fonctions ξ_1 ou ξ_2 ont des racines, ce sont nécessairement des racines de Z et ces racines ont nécessairement leur

partie réelle comprise entre zéro et un (limites non exclues jusqu'à présent).

57. *Genre des fonctions* $\xi_1(s, \chi)$ *ou* $\xi_2(s, \chi)$. — La démonstration que nous avons faite au chapitre précédent, § 4, s'applique sans changement au cas général, et nous pouvons énoncer les conclusions suivantes :

Les fonctions $\xi_1(s, \chi)$ si $\chi(-1) = 1$, ou $\xi_2(s, \chi)$ si $\chi(-1) = -1$, sont des fonctions entières du premier genre. Elles ont une infinité de racines dont la partie réelle est comprise entre zéro et un (limites non exclues jusqu'à présent). Enfin, si l'on désigne en général par ρ les racines d'une de ces fonctions, la série étendue à toutes ces racines

$$\sum \frac{1}{(\text{mod } \rho)^k}$$

sera convergente pour $k > 1$, divergente pour $k = 1$.

58. *Genre de* Z (s, χ). *Racines de cette fonction.* — Dans tous les cas, Z (s, χ) se présente comme un produit de trois fonctions du premier genre :

Pour $\chi(-1) = 1$, on a

$$Z(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \xi_1(s, \chi).$$

Pour $\chi(-1) = -1$,

$$Z(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \xi_2(s, \chi)$$

Donc la fonction Z est une fonction du premier genre. Cette fonction a une infinité de racines dont les parties réelles ne peuvent surpasser l'unité. Ce sont d'abord tous les pôles de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ si $\chi(-1) = 1$, ou bien tous ceux de $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$ si $\chi(-1) = -1$. En outre, une infinité de racines dont la partie réelle est com-

prise entre zéro et un, et qui sont celles de ξ_1 ou de ξ_2 suivant le cas. Dans la suite, nous n'aurons aucune raison de distinguer ces racines les unes des autres. C'est pourquoi nous représenterons en général les racines de $Z(s, \chi)$ par $\rho(\chi)$ sans distinction.

Il est encore important de remarquer que, pour les racines $\rho(\chi)$ ainsi définies, la série

$$\sum \frac{1}{[\text{mod } \rho(\chi)]^k},$$

étendue à toutes ces racines, sera encore convergente pour $k > 1$, car cette proposition est vraie respectivement pour les deux catégories de racines qui avaient été distinguées précédemment.

§ 6. — *Propriétés de la fonction* $Z(s, \chi)$ *dans le cas d'un caractère quelconque* (mod M).

59. Si χ est un *caractère propre* (mod M), les propriétés de la fonction $Z(s, \chi)$ ont été étudiées au paragraphe précédent.

Si χ est un *caractère impropre* (mod M), nous savons que χ sera un caractère propre (mod M′), en désignant par M′ un certain diviseur de M, et l'on a

$$Z(s, \chi \bmod M) = Z(s, \chi \bmod M').$$

On est donc immédiatement ramené au cas précédent. Nous n'avons donc plus à examiner que le cas d'un caractère incomplet (mod M) et celui du caractère principal.

60. *Cas d'un caractère incomplet* (mod M). Supposons que l'on ait

$$M = 2^e p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Un caractère incomplet renferme, par définition, dans sa composition plusieurs caractères principaux par rapport aux modules composants. Pour fixer les idées, supposons que ce soit

par rapport à $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots p_i^{\alpha_i}$. Le caractère χ sera un caractère propre ou impropre pour le module

$$M_1 = \frac{M}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}}.$$

Or la fonction

$$Z(s, \chi \bmod M) = \Pi \left(1 - \frac{\chi(q, \bmod M)}{q^s}\right)^{-1}$$

ne diffère de

$$Z(s, \chi \bmod M_1) = \Pi \left(1 - \frac{\chi(q, \bmod M_1)}{q^s}\right)^{-1}$$

que par la suppression des facteurs

$$\left(1 - \frac{\chi(p, \bmod M_1)}{p^s}\right)^{-1},$$

relatifs aux nombres premiers p qui divisent M sans diviser M_1. Désignons donc par

$$A(s, \chi) = \Pi \left(1 - \frac{\chi(p, \bmod M_1)}{p^s}\right)$$

le produit des inverses de ces facteurs qui sont en nombre limité. Comme les facteurs qui le composent, $A(s, \chi)$ sera une fonction entière dans toute l'étendue du plan, elle sera du premier genre et admettra une infinité de racines dont la partie réelle sera nulle.

On aura

$$Z(s, \chi \bmod M) = A(s, \chi) Z(s, \chi \bmod M_1).$$

Donc la fonction $Z(s, \chi \bmod M)$ sera encore une fonction entière du premier genre comme les deux facteurs qui la composent. Cette fonction aura une infinité de racines dont la partie réelle ne peut surpasser l'unité; seulement, dans le cas actuel, une infinité de racines sont situées sur l'axe imaginaire. Nous représenterons dorénavant toutes ces racines, sans distinction de

catégorie, par $\rho(\chi)$. On voit d'ailleurs immédiatement que la série

$$\sum \frac{1}{[\text{mod } \rho(\chi)]^k},$$

étendue à toutes ces racines, est encore convergente pourvu que l'on ait $k > 1$.

61. *Cas du caractère principal* (mod M). La réduction est analogue à la précédente dans le cas du caractère principal. La fonction

$$Z(s, \chi_0 \text{ mod } M)$$

ne diffère de la fonction

$$\zeta(s) = \Pi \left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^{-1}$$

de Riemann que par la suppression des facteurs relatifs aux nombres premiers 2, p_1, p_2, ... qui divisent M. Désignons donc par

$$A(s, \chi_0) = \Pi \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

le produit des inverses de ces facteurs. On aura

$$Z(s, \chi_0 \text{ mod } M) = A(s, \chi_0)\zeta(s).$$

Quant à $A(s, \chi_0)$, c'est une fonction entière du premier genre, qui possède une infinité de racines situées sur l'axe imaginaire des différentes formes

$$\rho = \frac{2k\pi i}{l2}, \quad \rho = \frac{2k\pi i}{lp_1}, \quad \rho = \frac{2k\pi i}{lp_2}, \ldots$$

La fonction $Z(s, \chi_0)$ possède donc un pôle simple $s = 1$. Mais le produit

$$(s - 1)Z(s, \chi_0)$$

est une fonction entière dans toute l'étendue du plan et du pre-

mier genre qui possède, outre les racines de $\zeta(s)$, une infinité de racines situées sur l'axe imaginaire. Nous représenterons dorénavant ces racines sans distinction par $\rho(\chi_0)$. Il est important de remarquer que la série

$$\sum \frac{1}{[\rho(\chi_0)]^k},$$

étendue à toutes ces racines, sera encore absolument convergente pour $k > 1$.

62. En résumé donc, on voit que la fonction $(s-1)\,Z(s, \chi_0)$ dans le cas du caractère principal, et les fonctions $Z(s, \chi)$ dans le cas d'un autre caractère, sont des fonctions entières du premier genre. Ces fonctions admettent une infinité de racines dont la partie réelle ne peut surpasser l'unité, et si l'on désigne respectivement ces racines par $\rho(\chi)$, dans tous les cas, les séries

$$\sum \frac{1}{[\text{mod}\ \rho(\chi)]^k},$$

seront absolument convergentes pour $k > 1$.

CHAPITRE IV.

Le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique.

63. La démonstration que nous allons exposer dans le présent chapitre est plus simple et plus complète que celle qui a été proposée par Dirichlet. Cette démonstration a déjà fait l'objet d'un travail antérieur que nous avons eu l'honneur de présenter à la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique. On reconnaîtra sans peine dans ce travail l'origine des recherches que nous faisons connaître aujourd'hui.

Comme ces premiers résultats sont le préliminaire indispenpensable de l'analyse plus complète qui nous occupe, nous sommes obligé de les reproduire, au moins succinctement, en renvoyant, pour plus de détails, au mémoire cité.

§ 1. — *Une équation fondamentale et ses conséquences immédiates.*

64. Supposons que les caractères χ soient définis par rapport à un module quelconque M (n° 45) et reprenons la fonction

$$Z(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(n)}{n^s} = \Pi \left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres, il vient, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$-\frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)} = \sum_q \frac{\chi(q) lq}{q^s - \chi(q)}$$
$$= \sum_q \chi(q) \frac{lq}{q^s} + \sum_q \frac{\chi(q) lq}{q^s(q^s - \chi(q))}.$$

Portons notre attention sur le second membre. On y trouve deux termes : le premier peut devenir infini pour $s = 1$; mais le second est constitué par une série absolument convergente pour $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$, quel que soit le caractère χ. Son produit par $(s - 1)$ tendra donc vers zéro quand s tendra vers l'unité. Ainsi, en multipliant la dernière équation par $(s - 1)$, puis passant à la limite $s = 1$, on trouve l'*équation fondamentale*

$$\text{(E)} \quad . \quad . \quad . - \lim_{s=1} (s - 1) \frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)} = \lim_{s=1} (s - 1) \sum_q \chi(q) \frac{lq}{q^s},$$

et cette équation (E) en représente en réalité φ (M) distinctes par l'échange des caractères entre eux.

65. Il s'agit maintenant de rechercher les différentes valeurs du premier membre selon le choix du caractère χ.

En premier lieu, le point $s = 1$ est un pôle simple de $Z(s, \chi_0)$ (62) ; on a donc, par la théorie des fonctions, dans le cas du caractère principal,

$$-\lim_{s=1} (s - 1) \frac{Z'(s, \chi_0)}{Z(s, \chi_0)} = \lim_{s=1} (s - 1) \sum \frac{lq}{q^s} = 1,$$

car le premier membre doit être égal au degré de multiplicité du pôle $s = 1$.

En second lieu, dans le cas d'un caractère différent du principal, le point $s = 1$ est un point ordinaire de $Z(s, \chi)$. C'est donc un point ordinaire ou un pôle pour

$$-\frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)},$$

suivant que ce point n'est pas racine ou est racine de la fonction $Z(s\,\chi)$:

Dans le premier cas,

$$-\lim_{s=1}(s-1)\frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)} = \lim_{s=1}(s-1)\sum_{q}\chi(q)\frac{lq}{q^s} = 0;$$

dans le second,

$$-\lim_{s=1}(s-1)\frac{Z'(s, \chi)}{Z(s, \chi)} = \lim_{s=1}(s-1)\sum_{q}\chi(q)\frac{lq}{q^s} = -\lambda,$$

en désignant par λ l'ordre du zéro $s = 1$.

66. Ajoutons ensemble toutes les équations qui se déduisent de (E) par l'échange des caractères entre eux. On obtiendra l'équation

$$1 - \sum\lambda = \sum_{q}\left[\frac{lq}{q^s}\,\mathcal{S}\chi(q)\right],$$

où $\Sigma\lambda$ représente la somme des ordres de multiplicité des zéros $s = 1$ pour les différentes fonctions $Z(s, \chi)$ qui auraient cette racine. Mais le second membre se simplifie, car la somme $\mathcal{S}\chi(q)$ est nulle, sauf pour les nombres premiers q_1 qui vérifient la condition

$$q_1 \equiv 1 \pmod{M}$$

et pour lesquels la somme des caractères est égale à $\varphi(M)$.

Notre équation se réduit donc à

$$1 - \sum \lambda = \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_{q_1} \frac{lq_1}{q_1^s}.$$

Pour s réel et > 1, le second membre est essentiellement positif; donc

$$\sum \lambda = 0, \quad \text{ou} \quad \sum \lambda = 1,$$

et il n'y a que deux hypothèses possibles :

1° *Aucune des fonctions* $Z(s, \chi)$ *ne s'annule pour* $s = 1$;
2° *Une seule de ces fonctions s'annule pour* $s = 1$ *et, dans ce cas, ce zéro doit être simple.*

On montrera plus loin que la seconde hypothèse est impossible; mais on reconnaît déjà que si par impossible elle se présente, la fonction $Z(s, \chi)$ qui s'annule correspond à un caractère réel, car, dans le cas contraire, la fonction conjuguée $Z\left(s, \frac{1}{\chi}\right)$ s'annulerait aussi pour $s = 1$. Il y aurait donc deux fonctions distinctes s'annulant pour cette valeur de s, ce qui est impossible, comme on vient de le dire.

§ 2. — *Aucune fonction* $Z(s, \chi)$ *ne s'annule pour* $s = 1$.

67. Il reste simplement à démontrer qu'une fonction $Z(s, \chi)$ ne peut s'annuler pour $s = 1$, dans le cas d'un caractère χ réel.

Pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, on a

$$Z(s, \chi) = \prod_q \left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1}.$$

Partageons le produit en deux parties, l'une relative aux nombres premiers q_1 pour lesquels $\chi(q) = 1$, l'autre aux nombres q_2 pour lesquels $\chi(q) = -1$. On aura

$$Z(s, \chi) = \Pi \left(1 - \frac{1}{q_1^s}\right)^{-1} \Pi \left(1 + \frac{1}{q_2^s}\right)^{-1}.$$

En introduisant des facteurs qui se détruisent dans le second membre, on peut encore écrire

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Z(s, \chi) = \Pi \left(\frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}}\right) \Pi \frac{1}{1 + q^{-s}},$$

le second de ces deux derniers produits s'étendant maintenant à tous les nombres premiers qui ne divisent pas M. Mais ce second produit peut se mettre sous la forme

$$\Pi \frac{1}{1 + q^{-s}} = \Pi \frac{1 - q^{-s}}{1 - q^{-2s}} = \frac{Z(2s, \chi_0)}{Z(s, \chi_0)},$$

et nous désignerons le premier par

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi(s) = \Pi \frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}}.$$

L'équation (1) donne alors

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi(s) = \frac{Z(s, \chi) Z(s, \chi_0)}{Z(2s, \chi_0)}.$$

Il est utile de remarquer que si, par impossible, tous les nombres premiers appartenaient à la catégorie q_1 pour laquelle $\chi(q) = -1$, il faudrait simplement remplacer l'équation (2) par

$$(2^a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi(s) = 1.$$

La définition de $\psi(s)$ par (2) n'est légitime que pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, mais la formule (3) nous donne une définition de $\psi(s)$ applicable dans tout le plan et nous fait connaître les propriétés analytiques de cette fonction :

Elle montre que $\psi(s)$ est méromorphe dans tout le plan. Ses pôles sont d'abord les zéros de

$$Z(2s, \chi_0),$$

qui ne peuvent avoir leur partie réelle supérieure à $\frac{1}{2}$, puis, en

outre, le point $s = 1$ qui est un pôle de

$$Z(s, \chi) Z(s, \chi_0),$$

sauf si $Z(s, \chi)$ s'annule pour $s = 1$.

Enfin le point $s = \frac{1}{2}$ étant un pôle de

$$Z(2s, \chi_0),$$

sera un zéro de $\psi(s)$.

On conclut de là que si $Z(s, \chi)$ s'annule pour $s = 1$, la fonction $\psi(s)$ sera synectique pour $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$ et s'annulera pour $s = \frac{1}{2}$. Il y a entre ces deux propriétés une contradiction que nous allons mettre en évidence.

68. Remarquons d'abord que, puisque $\psi(\frac{1}{2}) = 0$, l'équation (2^a) est impossible, car si l'on avait

$$\psi(s) = 1, \quad \text{pour} \quad \mathfrak{R}(s) > 1,$$

$\psi(s)$ serait égal à l'unité dans tout le plan. Il est donc déjà démontré qu'il y a des nombres premiers de la catégorie q_1.

Soit maintenant a une quantité réelle positive. Puisqu'on suppose $\psi(s)$ synectique pour $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$, la fonction de t

$$\psi(1 + a + t)$$

sera synectique pour

$$\mathfrak{R}(t) > -\left(a + \frac{1}{2}\right),$$

et, en vertu d'un théorème de Cauchy, nous pourrons la développer par la formule de Maclaurin :

$$(4) \qquad \psi(1 + a + t) = \psi(1 + a) + \frac{t}{1} \psi'(1 + a) + \frac{t^2}{1.2} \psi''(1 + a) + \cdots,$$

à l'intérieur du cercle de rayon $(a + \frac{1}{2})$ et sur la circonférence elle-même, car celle-ci ne passe par aucun point critique.

Mais on peut calculer toutes ces dérivées au moyen de la formule

$$\psi(s) = \Pi \frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}},$$

qui est valable pour $\mathfrak{R}(s) > 1$. A cet effet, remplaçons-y les facteurs $(1 - q_1^{-s})^{-1}$ par leur développement légitime

$$1 + q_1^{-s} + q_1^{-2s} + \cdots,$$

et effectuons les multiplications; on obtiendra une série telle que

$$\psi(s) = \sum \frac{\alpha_n}{n^s},$$

où la somme s'étend à tous les entiers composés au moyen des nombres premiers q_1 et où tous les coefficients α_n sont essentiellement positifs. Cette série converge uniformément pour $\mathfrak{R}(s) > 1 + \varepsilon$, de sorte qu'on peut la différentier comme un polynôme pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, et il vient ainsi

$$\psi^m(1 + a) = (-1)^m \sum_n \frac{\alpha_n (ln)^m}{n^{1+a}} = (-1)^m A_m.$$

On voit que les A_m sont positifs comme les α_n, et le développement de Maclaurin (4) prend la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(1 + a + t) = \psi(1 + a) - \frac{t}{1} A_1 + \frac{t^2}{1.2} A_2 + \cdots \\ + (-1)^m \frac{t^m}{1.2 \ldots m} A_m + \cdots \end{aligned} \right.$$

Dans cette égalité, on peut poser

$$t = -\left(a + \frac{1}{2}\right);$$

dans cette hypothèse, le premier membre est égal à $\psi(\frac{1}{2})$ et s'annule, tandis que le second se réduit à une somme de termes positifs. La contradiction est donc manifeste et la supposition est fausse : le point $s = 1$ n'est pas un zéro de $Z(s, \chi)$.

§ 3. — *Démonstration du théorème de Dirichlet.*

69. La démonstration du théorème de Dirichlet ne présente plus maintenant aucune difficulté. Revenons à l'équation (E) du n° 64; elle donne :

1° Pour le caractère principal,

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \frac{lq}{q^s}=1;$$

2° Pour un autre caractère,

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \chi(q)\frac{lq}{q^s}=0.$$

Soit N un nombre quelconque premier à M; déterminons, ce qui est toujours possible, un nombre N′ vérifiant la condition

$$NN'\equiv 1 \pmod{M};$$

puis multiplions l'équation précédente par $\chi(N')$; il viendra

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum \chi(qN')\frac{lq}{q^s}=0,$$

sauf dans le cas du caractère principal où le second membre est égal à l'unité. Comme tout à l'heure, ajoutons toutes les équations qui se déduisent de la précédente en donnant aux caractères leurs différentes valeurs; il viendra

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_q\left[\frac{lq}{q^s}\,S\chi(qN')\right]=1.$$

Mais le premier membre se simplifie, car

$$S\chi(qN')=\varphi(M),\quad \text{si}\quad qN'\equiv 1 \pmod{M},$$

et est nul dans tous les autres cas. Désignons donc en général

par q_N les nombres premiers qui vérifient les congruences équivalentes

$$q_N N' \equiv 1 \pmod{M}, \quad q_N \equiv N \pmod{M},$$

c'est-à-dire ceux de la forme linéaire $Mx + N$; on aura

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_N}{q_N^s} = \frac{1}{\varphi(M)}.$$

Cette équation montre qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $Mx + N$ si M et N sont premiers entre eux. Elle établit donc le théorème de Dirichlet, mais elle prouve, en outre, que la fréquence des nombres premiers q_N ne dépend pas de N et est la même pour les différentes progressions arithmétiques ayant même raison M.

70. J'ai montré, dans le mémoire rappelé en tête de ce chapitre, que la dernière équation contient le théorème suivant :

Si le rapport

$$\frac{1}{t} \sum_{q_N < t} lq_N,$$

qui a pour numérateur la somme des nombres premiers inférieurs à t et de la forme linéaire $(Mx + N)$ tend vers une limite déterminée quand t tend vers l'infini, cette limite ne peut être différente de $\frac{1}{\varphi(M)}$.

Il est très intéressant de savoir si cette limite hypothétique existe. Nous allons compléter la démonstration du chapitre actuel en établissant l'existence effective de cette limite. C'est ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE V.

Compléments du théorème de Dirichlet.

§ 1. — *Les fonctions* $Z(s, \chi)$ *n'ont pas de racines* ρ *de la forme* $1 + \beta i$ (*).

71. Montrons d'abord que si $\rho = 1 + \beta i$ est racine d'une des fonctions $Z(s, \chi)$, elle est racine d'une seule de ces fonctions et de plus une racine simple. La démonstration sera toute pareille à celle du § 1 du chapitre précédent, où il s'agissait de racines égales à *un*.

Revenons à l'équation du n° 64

$$-D \log Z(s, \chi) = \sum_q \frac{\chi(q)\, lq}{q^s - \chi(q)}.$$

Si ρ est une racine de degré λ de $Z(s, \chi)$, on aura

$$\lim_{s=\rho} (s - \rho) D \log Z(s, \chi) = \lambda.$$

Eu égard à la précédente, cette équation, pour $\rho = 1 + \beta i$, peut se réduire à

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \lim_{s=1} (s - 1) \sum \chi(q) \frac{lq}{q^{s+\beta i}} = -\lambda.$$

Cette équation (1) suppose simplement que $\mathcal{R}(s)$ est > 1, mais nous supposerons, en outre, que s est réel.

Ajoutons ensemble toutes les équations qui se déduisent de (1) par l'échange des caractères entre eux; il vient, en désignant de

(*) Cette démonstration n'est pas celle que nous avons exposée dans notre résumé; elle est visiblement inspirée par celle que M. Hadamard a publiée après la nôtre, mais elle est encore plus simple. (Voir la note à la fin de la troisième partie.)

nouveau par q_1 les nombres premiers de la forme $Mx + 1$,

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_1}{q_1^{s+\beta i}} = -\sum \lambda.$$

Mais la somme des modules des termes du premier membre est égale à l'unité en vertu de l'équation démontrée au paragraphe 3 du chapitre précédent (n° 69) :

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_1}{q_1^s} = 1.$$

Donc $\Sigma\lambda$, ne pouvant surpasser cette somme, est égal à *zéro* ou à *un*. C'est-à-dire qu'une seule au plus des fonctions $Z(s, \chi)$ s'annule pour $s = 1 + \beta i$ et que ce zéro doit être simple.

72. Je dis maintenant que cette dernière hypothèse elle-même est impossible. Pour le montrer, ajoutons les équations (2) et (3), en faisant $\Sigma\lambda = 1$ dans la première. Il vient

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum (1 + q_1^{-\beta i}) \frac{lq_1}{q_1^s} = 0,$$

et, en égalant les parties réelles,

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum (1 + \cos \beta lq_1) \frac{lq_1}{q_1^s} = 0.$$

Tous les termes sont positifs, car $(1 + \cos \beta lq_1)$ ne peut être négatif. Si nous multiplions respectivement tous ces termes par $(1 - \cos \beta lq_1)$ qui est compris entre 0 et 2, nous formerons une nouvelle somme qui sera nulle comme la précédente.

On trouve ainsi, eu égard aux relations

$$1 - \cos^2 \beta lq_1 = \sin^2 \beta lq_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta lq_1),$$

la nouvelle équation

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum (1 - \cos 2\beta lq_1) \frac{lq_1}{q_1^s} = 0$$

Mais celle-ci est impossible, car si l'on soustrait membre à membre les équations (2) et (3), après y avoir remplacé β par 2β, on trouve, en négligeant la partie imaginaire,

$$\varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum (1 - \cos 2\beta l q_1) \frac{l q_1}{q_1^s} = 1 + \sum \lambda.$$

Le second membre est égal à 2 ou à 1 suivant que $1 + 2\beta i$ est ou n'est pas racine d'une des fonctions $Z(s, \chi)$, mais dans aucune hypothèse il ne peut être nul. *Donc aucune des fonctions* $Z(s, \chi)$ *n'a de racines de la forme* $1 + \beta i$.

§ 2. — *Démonstration d'une équation fondamentale.*

73. Revenons encore à l'équation du n° 64

$$-D \log Z(s, \chi) = \sum_q \frac{\chi(q) l q}{q^s - \chi(q)}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation précédente par

$$\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)},$$

où l'on désigne par u et v des quantités réelles ou complexes distinctes des pôles de $D \log Z(s, \chi)$. Cela fait, soit a une quantité réelle supérieure à l'unité et aux parties réelles de u et de v, et b une quantité réelle que nous ferons tendre vers l'infini. Intégrons les deux membres de notre équation de $(a - bi)$ à $(a + bi)$; il viendra à la limite

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} D \log Z(s, \chi) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \sum \frac{\chi(q) l q}{q^s - \chi(q)}. \end{aligned} \right.$$

74. Évaluons d'abord le second membre. Il suffit, pour cela, de reproduire les raisonnements du n° 25 de la première partie. En remarquant que

$$\frac{\chi(q)lq}{q^s - \chi(q)} = \chi(q)\frac{lq}{q^s} + \chi(q^2)\frac{lq}{q^{2s}} + \chi(q^3)\frac{lq}{q^{3s}} + \cdots,$$

on trouve que ce second membre a pour valeur

$$\frac{y^u}{u-v}\left[\sum_{q<y}\chi(q)\frac{lq}{q^u} + \sum_{q^2<y}\chi(q^2)\frac{lq}{q^{2u}} + \cdots\right]$$
$$-\frac{y^v}{u-v}\left[\sum_{q<y}\chi(q)\frac{lq}{q^v} + \sum_{q^2<y}\chi(q^2)\frac{lq}{q^{2v}} + \cdots\right].$$

Par analogie avec ce qui a été fait dans la première partie, nous simplifierons ces notations, en posant en abrégé

$$(2) \quad . \quad . \quad \sum_{q^m<y}\frac{\chi(q^m)lq}{q^{mu}} = \sum_{q<y}\chi(q)\frac{lq}{q^u} + \sum_{q^2<y}\chi(q^2)\frac{lq}{q^{2u}} + \cdots$$

La valeur du second membre de notre équation peut alors s'écrire plus simplement

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{y^u}{u-v}\sum_{q^m<y}\frac{\chi(q^m)lq}{q^{mu}} - \frac{y^v}{u-v}\sum_{q^m<y}\frac{\chi(q^m)lq}{q^{mv}}.$$

Passons à l'évaluation de l'intégrale du premier membre, savoir, en changeant son signe,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \mathrm{D}\log \mathrm{Z}(s,\chi)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}.$$

Il y a deux cas à distinguer selon qu'on a affaire : 1° au caractère principal ; 2° à un autre caractère.

1° Dans le cas du caractère principal, la fonction

$$(s-1)\mathrm{Z}(s,\chi_0)$$

est une fonction entière du premier genre (62) qui a une infinité

de racines dont la partie réelle est inférieure à l'unité et que nous représentons sans distinction par $\rho(\chi_0)$. On a d'ailleurs

$$D \log Z(s, \chi_0) = D \log (s-1) Z(s, \chi_0) - D \log (s-1),$$

et, par conséquent, par le théorème du n° 23 de la première partie,

$$(4) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} D \log Z(s, \chi_0) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ & = \frac{1}{u-v} \left[y^u \frac{Z'(u, \chi_0)}{Z(u, \chi_0)} - y^v \frac{Z'(v, \chi_0)}{Z(v, \chi_0)} \right] \\ & - \frac{y}{(u-1)(v-1)} + \sum_{\rho(\chi_0)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{aligned} \right.$$

2° Dans le cas d'un autre caractère, la fonction $Z(s, \chi)$ est une fonction entière du premier genre (63), dont nous représentons en général les racines par $\rho(\chi)$. Toutes ces racines ont leur partie réelle égale au plus à l'unité. On peut appliquer à cette fonction le même théorème, ce qui donne

$$(5) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} D \log Z(s, \chi) \frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ & = \frac{1}{u-v} \left[y^u \frac{Z'(u, \chi)}{Z(u, \chi)} - y^v \frac{Z'(v, \chi)}{Z(v, \chi)} \right] \\ & + \sum_{\rho(\chi)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{aligned} \right.$$

75. L'équation (1) se transforme ainsi, suivant le choix du caractère, dans l'une des suivantes :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(6^a) \quad \left\{ \begin{aligned} & y^u \sum_{q^m < y} \frac{lq}{q^{mu}} - y^v \sum_{q^m < y} \frac{lq}{q^{mv}} = - y^u \frac{Z'(u, \chi_0)}{Z(u, \chi_0)} + y^v \frac{Z'(v, \chi_0)}{Z(v, \chi_0)} \\ & \qquad + (u-v) \frac{y}{(u-1)(v-1)} - (u-v) \sum_{\rho(\chi_0)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}; \end{aligned} \right.$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(6^b)\quad \left\{\begin{aligned} & y^u \sum_{q^m<y} \frac{\chi(q^m)lq}{q^{mu}} - y^v \sum_{q^m<y} \frac{\chi(q^m)lq}{q^{mv}} = -y^u \frac{Z'(u,\chi)}{Z(u,\chi)} + y^v \frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} \\ & \qquad -(u-v) \sum_{\rho(\chi)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations (6) subsistent, comme on l'a expliqué au n° 26 de la première partie, pour toutes les valeurs de u et de v.

§ 3. — *Cas particuliers des équations du paragraphe précédent.*

76. *Premier cas particulier.* Nous allons d'abord faire tendre v vers zéro dans les formules (6) du numéro précédent. Il peut se faire que $Z(s, \chi)$ ait des racines nulles; en particulier, c'est toujours le cas pour $Z(s, \chi_0)$. Supposons donc, en général, que $s = 0$ soit une racine de degré λ de multiplicité de $Z(s, \chi)$. Dans les seconds membres des équations (6^b), les termes qui dépendent de v sont

$$y^v \frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} - (u-v) \sum_{\rho(\chi)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}.$$

Isolons de cette somme Σ les termes relatifs aux λ racines nulles et accentuons la somme étendue aux autres racines. L'expression précédente pourra s'écrire

$$y^v \frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} - \lambda\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) - (u-v) \sum_{\rho(\chi)}{}' \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)},$$

ou, en introduisant des termes qui se détruisent,

$$y^v \left[\frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} - \frac{\lambda}{v}\right] + \lambda \frac{y^v - 1}{v} + \frac{\lambda}{u} - (u-v) \sum_{\rho(\chi)}{}' \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}.$$

Si v tend vers zéro, cette expression a pour limite

$$\lambda ly + \frac{\lambda}{u} + \lim_{v=0}\left[\frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} - \frac{\lambda}{v}\right] - u \sum_{\rho(\chi)}{}' \frac{y^\rho}{\rho(\rho-u)}.$$

Si l'on fait donc tendre v vers zéro dans les seconds membres des équations (6) et si l'on tient compte de la transformation ci-dessus, on trouve, en divisant par y^u :

1° Dans le cas du caractère principal, si $Z(v, \chi_0)$ a une racine $v = 0$ de degré λ,

$$(7^a)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{q^m<y} \frac{lq}{q^{mu}} - \frac{1}{y^u} \sum_{q^m<y} lq = &- \frac{Z'(u, \chi_0)}{Z(u, \chi_0)} + \frac{u}{1-u} y^{1-u} - u \sum_{\rho(\chi_0)}{}' \frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)} \\ &+ \frac{1}{y^u}\left[\lambda l y + \frac{\lambda}{u} + \lim_{v=0}\left(\frac{Z'(v, \chi_0)}{Z(v, \chi_0)} - \frac{\lambda}{v}\right)\right]; \end{aligned} \right.$$

2° Dans le cas d'un autre caractère, si $Z(v, \chi)$ a une racine nulle de degré μ,

$$(7^b)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{q^m<y} \frac{\chi(q^m) lq}{q^{mu}} - \frac{1}{y^u} \sum_{q^m<y} \chi(q^m) lq = &- \frac{Z'(v, \chi)}{Z(v, \chi)} - u \sum_{\rho(\chi)}{}' \frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)} \\ &+ \frac{1}{y^u}\left[\mu l y + \frac{\mu}{u} + \lim_{v=0}\left(\frac{Z'(v, \chi)}{Z(v, \chi)} - \frac{\mu}{v}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Le cas où $Z(v, \chi)$ n'a pas de racines nulles est compris dans le précédent pour $\mu = 0$.

77. *Deuxième cas particulier. Simplification des équations précédentes dans l'hypothèse* $\mathfrak{R}(u) = 1$. Supposons que la partie réelle de u soit égale à l'unité. Les deux membres de l'équation (7) peuvent se simplifier.

Quant au premier membre, on voit, comme au n° 53 de la première partie, que la somme

$$\sum_{q^m<y} \frac{\chi(q^m) lq}{q^{mu}} - \frac{1}{y^u} \sum_{q^m<y} \chi(q^m) lq$$

ne diffère de

$$\sum_{q<y} \frac{\chi(q) lq}{q^u - \chi(q)} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} \chi(q) lq$$

que par une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini.

Passons au second membre. Le terme écrit sur la seconde ligne tend rapidement vers zéro quand y augmente. La somme absolument convergente

$$\sum_{\rho(\chi)}{}' \frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)}$$

tend aussi vers zéro, parce que toutes les racines ρ ont leur partie réelle inférieure à l'unité.

Si donc on désigne, en général, par ε une quantité infiniment petite pour y infiniment grand, les équations (7) donneront, pour $\mathfrak{R}(u) = 1$:

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(8^a) \quad \sum_{q<y} \frac{lq}{q^u - 1} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} lq = -\frac{Z'(u, \chi_0)}{Z(u, \chi_0)} + \frac{u}{1-u} y^{1-u} + \varepsilon;$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(8^b) \quad \sum_{q<y} \frac{\chi(q)\, lq}{q^u - \chi(q)} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} \chi(q)\, lq = -\frac{Z'(u, \chi)}{Z(u, \chi)} + \varepsilon.$$

78. On peut encore simplifier l'écriture de ces deux équations. Comme on suppose que $\mathfrak{R}(u) = 1$, les deux différences

$$\sum_{q<y} \frac{lq}{q^u} - \sum_{q<y} \frac{lq}{q^u - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{q<y} \chi(q) \frac{lq}{q^u} - \sum_{q<y} \frac{\chi(q)\, lq}{q^u - \chi(q)}$$

convergent vers des limites finies quand y tend vers l'infini. Désignons donc, en général, par L une expression dont on saura seulement qu'elle converge vers une limite déterminée quand y croît indéfiniment ; les équations (8) pourront s'écrire, toujours bien entendu dans l'hypothèse $\mathfrak{R}(u) = 1$:

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(9^a) \quad \sum_{q<y} \frac{lq}{q^u} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} lq = -\frac{Z'(u, \chi_0)}{Z(u, \chi_0)} + \frac{u}{1-u} y^{1-u} + L;$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(9^b) \quad \sum_{q<y} \chi(q) \frac{lq}{q^u} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} \chi(q)\, lq = L.$$

Il est bien entendu que la lettre L ne représente pas la même quantité aux seconds membres de ces deux équations.

§ 4. — *Conséquences asymptotiques.*

79. Si l'on fait, en particulier, $u = 1$, dans les équations (9) qui précèdent, il viendra :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(10^a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{q<y} \frac{lq}{q} - \frac{1}{y} \sum_{q<y} lq = ly + \mathrm{L};$$

2° Pour un autre caractère,

$$(10^b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{q<y} \chi(q) \frac{lq}{q} - \frac{1}{y} \sum \chi(q) lq = \mathrm{L}$$

Soient N un nombre premier à M, et N_1 un nombre vérifiant la condition $\mathrm{NN}_1 \equiv 1$ (mod. M). Multiplions la dernière équation par $\chi(\mathrm{N}_1)$; elle devient

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \sum_{q<y} \frac{\chi(q\mathrm{N}_1) lq}{q} - \frac{1}{y} \sum_{q<y} \chi(q\mathrm{N}_1) lq = \mathrm{L}.$$

Cette équation est vraie pour tous les caractères, sauf pour le principal, auquel cas on retombe sur l'équation (10^a).

Ajoutons entre elles toutes les équations qui se déduisent de (11) en y substituant tous les caractères et aussi l'équation qui correspond au caractère principal. La somme des caractères étant nulle, sauf pour les nombres premiers q_{N} de la forme $\mathrm{M}x + \mathrm{N}$ (n° 69), cas auquel elle est égale à $\varphi(\mathrm{M})$, il vient

$$(12) \quad . \quad . \quad \varphi(\mathrm{M}) \left[\sum_{q_{\mathrm{N}}<y} \frac{lq_{\mathrm{N}}}{q_{\mathrm{N}}} - \frac{1}{y} \sum_{q_{\mathrm{N}}<y} lq_{\mathrm{N}} \right] = ly + \mathrm{L},$$

et L désigne toujours une quantité convergente pour $y = \infty$.

80. La dernière équation est de la même forme que celle sur laquelle nous avons raisonné dans la première partie du mémoire (chap. IV, § 2). Elle conduit aux conséquences corres-

pondantes que nous allons énoncer, en renvoyant aux démonstrations de la première partie :

1° *L'expression*

$$\frac{\varphi(\mathrm{M})}{y}\sum_{q_{\mathrm{N}}<y} lq_{\mathrm{N}},$$

dans laquelle la somme est étendue aux nombres premiers $<$ y *et de la forme* Mx + N, *a pour limite l'unité, quand* y *tend vers l'infini* (*).

2° *La différence*

$$\varphi(\mathrm{M})\sum_{q_{\mathrm{N}}<y}\frac{lq_{\mathrm{N}}}{q_{\mathrm{N}}}-ly$$

tend vers une limite finie et déterminée quand y *tend vers l'infini.*

3° *Quelque petite que soit la constante* h, *le nombre des nombres premiers de la forme* Mx + N *compris entre* y *et* (1 + h) y *augmente indéfiniment avec* y, *quelle que soit la manière dont* y *tende vers l'infini.*

81. 4° *Le nombre* f(y) *des nombres premiers de la forme* Mx + N *et* $<$ y *peut se représenter par l'expression*

$$(13)\quad \ldots\ldots\ldots f(y)=\frac{1+\varepsilon}{\varphi(\mathrm{M})}\frac{y}{ly},$$

où ε *est infiniment petit pour* y *infiniment grand.*

Démonstration. — Soit, en général, ε une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini. On peut poser, comme on l'a dit au numéro précédent (1°),

$$(\alpha)\quad \ldots\ldots\ldots \sum_{q<y} lq_{\mathrm{N}}=\frac{1+\varepsilon}{\varphi(\mathrm{M})}y.$$

Désignons par $f(y)$ le nombre des nombres premiers q_{N} qui sont $< y$; on aura $lq_{\mathrm{N}} < ly$, d'où

$$\sum_{q<y} lq_{\mathrm{N}} < f(y)\,ly,$$

(*) Nous avons communiqué ce théorème à la Société scientifique dans la séance du 16 avril 1896 et il a été publié, pour la première fois, dans le *Bulletin* de cette session.

et par (α)

$$(\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(y) > \frac{1+\varepsilon}{\varphi(\mathrm{M})} \frac{y}{ly}.$$

Soit, d'autre part, Σ' une somme étendue aux nombres $q_{\mathrm{N}} > y : (ly)^2$ et $< y$. Pour ceux-ci, on a $lq_{\mathrm{N}} > ly - 2\, lly$. Comme le nombre des nombres premiers $< y : (ly)^2$ est évidemment inférieur à $y : (ly)^2$, le nombre des termes de la somme Σ' sera supérieur à $f(y) - y : (ly)^2$. De là les inégalités :

$$\sum_{q<y} lq_{\mathrm{N}} > \sum{}' lq_{\mathrm{N}} > \left[f(y) - \frac{y}{(ly)^2} \right] (ly - 2lly).$$

On en tire par l'équation (α)

$$(\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(y) < \frac{1+\varepsilon}{\varphi(\mathrm{M})} \frac{y}{ly - 2lly} + \frac{y}{(ly)^2}.$$

Les seconds membres des inégalités (β) et (γ) sont tous les deux de la forme du second membre de (13). Le théorème est donc démontré.

82. Tous les théorèmes précédents sont des conséquences des équations (9). Nous allons terminer par des théorèmes plus particuliers, qui seront des conséquences des équations (8).

5° *Pour tout caractère différent du principal, la série étendue aux nombres premiers* q *successifs, rangés par ordre de grandeur,*

$$\sum \frac{\chi(q)\, lq}{q^u - \chi(q)},$$

est convergente pour $\mathfrak{R}(u) = 1$ *et a pour somme*

$$-\frac{\mathrm{Z}'(u, \chi)}{\mathrm{Z}(u, \chi)}.$$

Démonstration. — Désignons par Σ_{N} une somme qui s'étend aux nombres premiers avec M et $<$ M et faisons la décomposition

$$\frac{1}{y^u} \sum_{q<y} \chi(q)\, lq = y^{1-u} \sum_{\mathrm{N}} \left[\frac{\chi(\mathrm{N})}{y} \sum_{q_{\mathrm{N}}<y} lq_{\mathrm{N}} \right],$$

nous voyons que cette somme tend vers zéro pour y infini, parce que tous les rapports

$$\frac{1}{y}\sum_{qN<y} lq_N$$

tendent vers la même limite $1 : \varphi(M)$ et que la somme $\Sigma\chi(N)$ des caractères est nulle.

Pour $\Re(u) = 1$, l'équation (8^b) du n° 77 doit donc se réduire à

$$\sum_{q<y} \frac{\chi(q)lq}{q^u - \chi(q)} = -\frac{Z'(u,\chi)}{Z(u,\chi)} + \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème.

6° *Dans le cas du caractère principal, la série illimitée cesse d'être convergente pour* $\Re(u) = 1$, *mais on a alors la formule asymptotique pour* $y = \infty$:

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{q<y} \frac{lq}{q^u - 1} = -\frac{Z'(u,\chi_0)}{Z(u,\chi_0)} + \frac{y^{1-u}}{1-u} + \varepsilon.$$

Cette formule est une conséquence de l'équation (8^a) où l'on remplacera le terme

$$\frac{1}{y^u}\sum_{q<y} lq$$

par sa valeur asymptotique y^{1-u}.

Corollaire. — Dans le cas où la somme s'étend à tous les nombres premiers $p < y$ sans distinction, on aura la formule asymptotique

$$\sum_{p<y} \frac{lp}{p^u - 1} = -\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} + \frac{y^{1-u}}{1-u} + \varepsilon.$$

A la limite, quand y augmente indéfiniment, le premier membre devient donc, pour $\Re(u) = 1$, une fonction périodique de y.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

TROISIÈME PARTIE

LES FORMES QUADRATIQUES DE DÉTERMINANT NÉGATIF.

CHAPITRE PREMIER.

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DE QUELQUES FONCTIONS AUXILIAIRES.

§ 1. — *Considérations générales sur la portée de la démonstration.*

1. C'est à Dirichlet que l'on doit d'avoir étendu aux formes quadratiques le théorème de la progression arithmétique (*Académie de Berlin*, 1840, et t. XXI du *Journal de Crelle*). On trouve dans ce travail plutôt l'esquisse d'une démonstration qu'une démonstration complète. Dirichlet a généralisé son théorème dans les *Comptes rendus* de 1850, en montrant qu'une forme quadratique proprement primitive peut représenter une infinité de nombres premiers qui sont en même temps d'une forme linéaire donnée, pourvu que les caractères quadratiques de ces deux formes soient compatibles. M. H. Weber a, dans un travail remarquable (*Math. Ann.*, t. XX, p. 301), fait disparaître les lacunes considérables que Dirichlet avait laissées dans la démonstration de son théorème sous sa forme restreinte. Enfin,

M. A. Meyer (*Journ. für d. reine u. ang. Math.*, t. CIII, p. 98) a étendu la méthode de M. Weber à la démonstration du théorème sous sa forme la plus complète.

2. Les principes des méthodes de Riemann et de M. Hadamard, dont nous venons de reconnaître l'efficacité dans la théorie des formes linéaires, peuvent aussi s'étendre à la théorie des formes quadratiques. Il se présente toutefois une différence très considérable entre les formes de déterminant positif et celles de déterminant négatif. Ainsi, tandis que l'extension se fait naturellement à ces dernières, les formes de déterminant positif exigent une analyse beaucoup plus compliquée. C'est pourquoi, nous nous bornerons, dans cette troisième partie, à la théorie des formes de déterminant négatif et nous traiterons dans une quatrième partie celle des formes de déterminant positif (*).

Nous pourrions abréger notre travail en utilisant immédiatement les formules de MM. Weber et Meyer. Cependant, nous allons refaire toute la démonstration par une méthode nouvelle qui nous paraît offrir de multiples avantages. Nous n'en signalerons que deux.

Dans notre premier chapitre, nous étudions une fonction $\Phi(t, c)$ qui possède une propriété fonctionnelle fondamentale. Celle-ci s'exprime par la formule (11) du § 3. M. Weber établit une formule analogue et qui pourrait nous servir (**). Mais M. Bachmann, dans sa *Zahlentheorie* (2e partie, p. 298), attire l'attention sur la difficulté et la longueur excessive de la démonstration de MM. Weber et Meyer où l'on fait appel aux fonctions θ de deux arguments. Si bien qu'il se voit forcé de se contenter de la résumer dans son livre, en renvoyant à l'original pour le détail de la démonstration et en émettant le vœu d'en voir proposer une plus simple. Sur ce point, nous pensons satisfaire complètement au

(*) Un résumé de cette quatrième partie a paru dans le *Bulletin* (session du 28 janvier 1897).

(**) M. Hadamard prend cette formule comme point de départ de la démonstration qu'il a esquissée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1896) et dont nous avons déjà parlé dans la note placée en tête de la deuxième partie.

desideratum de M. Bachmann : la démonstration qui fait l'objet de nos §§ 2 et 3 n'a rien d'excessif comme longueur ; elle est absolument complète et ne s'appuie que sur la propriété très élémentaire de la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ qui a été démontrée, en quelques lignes, dans la seconde partie du mémoire.

Le second avantage que nous voyons dans notre méthode est d'éliminer toutes les considérations relatives à la loi de réciprocité de Legendre, qui formaient une des parties délicates des démonstrations précédentes.

Nous traiterons seulement dans cette partie, le cas où l'on ne fait pas intervenir la progression arithmétique, parce qu'il est le plus simple et qu'à notre avis il y a toujours avantage à commencer par ce premier cas. Le lecteur qui aura examiné notre travail et qui voudra bien y joindre les considérations particulières qui font l'objet de la généralisation de M. Meyer, verra que notre méthode et nos résultats s'étendent d'eux-mêmes au cas le plus compliqué. Nous nous réservons d'ailleurs de montrer plus tard que toutes les longueurs inhérentes à la méthode de M. Meyer disparaissent en même temps.

§ 2. — *Définition et propriété fonctionnelle de* $F(\alpha, \beta, t)$.

3. La relation fonctionnelle qu'il s'agit d'établir dans ce paragraphe est une conséquence de celle à laquelle satisfait la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ de la seconde partie du mémoire. Voici cette dernière relation (2e partie, n° 3) :

$$\psi_1(\alpha, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x}} \cos 2n\pi\alpha\right].$$

Ce qui nous sera utile dans cette équation peut se condenser dans la formule plus simple :

$$\psi_1(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\theta(x)}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi}{x}},$$

en désignant, d'une manière générale, par $\theta(x)$ une fonction continue qui tend vers une limite finie quand x tend vers zéro.

C'est sous une forme un peu différente que nous aurons à nous servir de cette relation. Désignons par μ et ν deux constantes positives, par α et β deux constantes quelconques et faisons le produit de deux équations analogues à la précédente; nous obtiendrons un résultat de la forme

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \psi_1(\alpha, \mu x)\psi_1(\beta, \nu x) = \frac{1}{x\sqrt{\mu\nu}} + \frac{\theta(x)}{x} e^{-\frac{K}{x}},$$

où $\theta(x)$ est une fonction continue qui tend vers une limite finie quand x tend vers zéro et où K est une quantité indépendante de x et plus grande que zéro.

C'est à la relation (1) que nous allons ramener la propriété fonctionnelle de la fonction $\Phi(t, c)$ qui jouera, dans cette troisième partie du mémoire, le même rôle que les fonctions $\psi(\alpha, x)$ dans la seconde. Nous étudierons cette fonction au paragraphe suivant et nous commencerons par l'étude d'une fonction intermédiaire $F(\alpha, \beta, t)$.

4. *Définition de la fonction* $F(\alpha, \beta, t)$. — Cette définition se rattache à la considération d'une forme quadratique f de déterminant négatif $(-\Delta)$ et à coefficients positifs

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

et la fonction F s'exprime par la somme double

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(\alpha, \beta, t) = \sum_{m,n} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t},$$

où l'on a

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x = \alpha + 2m\Delta, \\ y = \beta + 2n\Delta. \end{cases}$$

Quant aux variables m et n, par rapport auxquelles se fait la sommation, elles reçoivent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

5. *Réduction de* $F(\alpha, \beta, t)$ *à des fonctions* $F_{i,k}(t)$. — Nous nous proposons de trouver une relation fonctionnelle vérifiée par $F(\alpha, \beta, t)$. Pour cela, nous allons partager la somme $\Sigma_{m,n}$ qui sert de définition à cette fonction, en ab sommes partielles que nous désignerons respectivement par $F_{i,k}(t)$, ces indices prenant les systèmes de valeurs

$$i = 0, 1, 2, \ldots (b-1); \qquad k = 0, 1, 2, \ldots (a-1).$$

La fonction $F_{i,k}(t)$ sera définie par la somme double

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad F_{i,k}(t) = \sum_{m',n'} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t},$$

où x et y s'expriment toujours par les formules (3), mais où m et n prennent les seuls systèmes de valeurs qui se déduisent des formules

$$\begin{cases} m = i + bm', \\ n = k + an', \end{cases}$$

quand on donne à m' et n' tous les systèmes de valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

Il est clair que la somme $F_{i,k}(t)$ comprend une partie des termes qui entrent dans la somme F et que l'on a

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad F(\alpha, \beta, t) = \sum_{i,k} F_{i,k}(t).$$

Afin d'exprimer simplement x et y en fonction de m' et n', posons en abrégé,

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + 2i\Delta, \\ \beta' = \beta + 2k\Delta. \end{cases}$$

On voit que, pour former la fonction

$$F_{i,k}(t) = \sum_{m',n'} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t},$$

il faut donner à x et y tous les systèmes de valeurs qui se

déduisent des formules

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x = \alpha' + 2b\Delta m', \\ y = \beta' + 2a\Delta n', \end{cases}$$

quand m', n' reçoivent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

6. *Réduction de* $F_{i,k}(t)$ *à la fonction* ψ_1. — Pour les valeurs de x, y définies par les formules (6) ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} ax^2+2bxy+cy^2 &= \frac{1}{a}\left[(ax+by)^2+\Delta y^2\right] \\ &= \frac{1}{a}\left\{[a\alpha'+b\beta'+(m'+n')2ab\Delta]^2+\Delta(\beta'+2a\Delta n')^2\right\} \\ &= \left[\frac{a\alpha'+b\beta'}{2ab\Delta}+(m'+n')\right]^2 4ab^2\Delta^2+\left(\frac{\beta'}{2a\Delta}+n'\right)^2 4a\Delta^3. \end{aligned}$$

Posons encore, en abrégé,

$$\alpha'' = \frac{a\alpha'+b\beta'}{2ab\Delta}, \quad \beta'' = \frac{\beta'}{2a\Delta}, \quad m'+n' = m'';$$

pour chaque valeur de n', on devra attribuer à m'' toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Il vient ainsi

$$ax^2+2bxy+cy^2 = (\alpha''+m'')^2 4ab^2\Delta^2 + (\beta''+n')^2 4a\Delta^3,$$

et, par conséquent,

$$F_{i,k}(t) = \sum_{m''} e^{-(\alpha''+m'')^2 4ab^2\Delta^2 t} \sum_{n'} e^{-(\beta''+n')^2 4a\Delta^3 t},$$

c'est-à-dire, par la définition de ψ_1 rappelée au n° 3,

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad F_{i,k}(t) = \psi_1\left(\alpha'', \frac{4ab^2\Delta^2 t}{\pi}\right)\psi_1\left(\beta'', \frac{4a\Delta^3 t}{\pi}\right).$$

7. *Propriétés fonctionnelles de* $F_{i,k}(t)$ *et* $F(\alpha, \beta, t)$. — Appliquons au second membre de la dernière équation la relation (1)

du n° 3, nous obtiendrons un résultat de la forme

$$F_{i,k}(t) = \frac{\pi}{4ab\Delta^2\sqrt{\Delta}}\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}e^{-\frac{K}{t}}.$$

C'est la relation fonctionnelle que vérifie $F_{i,k}(t)$: on y désigne par $\theta(t)$ une fonction qui reste finie quand t tend vers zéro et par K une quantité positive indépendante de t et qui peut dépendre des indices i, k.

Par la permutation des indices i, k, on déduit ab équations distinctes de celle qui précède; ajoutons-les entre elles, nous obtiendrons, eu égard à (5), la relation fonctionnelle vérifiée par F, savoir :

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(\alpha, \beta, t) = \frac{\pi}{4\Delta^2\sqrt{\Delta}}\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}e^{-\frac{K}{t}}.$$

Les symboles $\theta(t)$ et K conservent la signification générale qui leur était attribuée dans l'équation précédente, mais la valeur actuelle de K est la plus petite de celles que K pouvait recevoir dans l'équation précédente par la permutation des i, k.

Cette relation (8) joue un rôle fondamental dans la suite de notre étude. Elle présente cette particularité très remarquable que le premier terme au second membre ne dépend aucunement de α ni de β, mais seulement du déterminant $(-\Delta)$ de la forme quadratique.

§ 3. — *Définition et propriétés de la fonction* $\Phi(t, c)$.

8. *Définition de* $\Phi(t, c)$. — Désignons par c une classe de formes (positives) proprement primitives du déterminant $(-\Delta)$ et soit f un représentant de cette classe :

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Nous définirons la fonction $\Phi(t, c)$ par la somme double

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Phi(t, c) = \sum_{x, y} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t},$$

où l'on donne à x et y tous les systèmes de valeurs positives et négatives, pour lesquels f acquiert une valeur impaire et première à Δ. Il est clair, d'après cela, que la définition de $\Phi(t, c)$ ne dépend pas du choix de la forme f dans la classe c.

Il résulte de cette dernière remarque qu'on peut choisir la forme f de manière à simplifier les raisonnements.

On peut d'abord admettre que a est premier avec 2Δ, car, dans le cas contraire, on remplacerait f par une forme équivalente dans laquelle cette condition serait remplie. Ensuite, on peut admettre que b est positif, divisible par Δ et, de plus, pair ou impair en même temps que Δ, de façon que

$$c = \frac{b^2 + \Delta}{a}$$

soit toujours pair et divisible par Δ. En effet, si cette condition n'avait pas lieu, par une substitution

$$\begin{cases} x = x' + \lambda y', \\ y = y', \end{cases}$$

où λ est une inconnue à déterminer convenablement, on remplacerait (a, b, c) par une forme équivalente (a, b', c'), où b' serait positif et déterminé par la congruence

$$b' = b + \lambda a \equiv 0 \pmod{\Delta},$$

à laquelle on ajouterait

$$b' \equiv 1 \pmod{2},$$

si Δ était impair.

La forme f étant choisie de cette manière, il suffit, pour que

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

soit premier à 2Δ, que x soit premier à 2Δ, tandis que y n'est plus soumis à aucune condition.

9. *Réduction de* $\Phi(t, c)$ *aux fonctions* $F(\alpha, \beta, t)$, *propriété fonctionnelle de* $\Phi(t, c)$. — Désignons par α un quelconque des

nombres compris entre 0 et 2Δ et premiers à 2Δ, puis par β un des nombres

$$0, 1, 2, \ldots 2\Delta - 1,$$

et remarquons que tous les systèmes de valeurs de x, y

$$\begin{cases} x = \alpha + 2m\Delta, \\ y = \beta + 2n\Delta, \end{cases}$$

obtenus en donnant à m, n toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, rendront la forme f première à 2Δ; il résulte de là que la somme étendue à toutes ces valeurs, savoir :

$$F(\alpha, \beta, t) = \sum_{m, n} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t},$$

contiendra une partie des termes qui entrent dans la somme

$$\Phi(t, c) = \sum_{x, y} e^{-(ax^2+2bxy+cy)^2 t},$$

et que celle-ci sera la somme de $2\Delta\varphi(2\Delta)$ expressions analogues à $F(\alpha, \beta, t)$, obtenues en attribuant à α, β les différents systèmes de valeurs possibles. On a donc

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \Phi(t, c) = \sum_{\alpha, \beta} F(\alpha, \beta, t).$$

Pour obtenir la relation fonctionnelle que vérifie $\Phi(t, c)$, il faut donc ajouter $2\Delta\varphi(2\Delta)$ relations analogues à (8) et il vient ainsi :

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \Phi(t, c) = \frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}}\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}e^{-\frac{K}{t}}.$$

Comme dans la formule (8), on désigne, en général, par $\theta(t)$ une fonction continue qui tend vers une limite finie quand t tend vers zéro et par K un nombre positif indépendant de t.

§ 4. — *Étude de la fonction* Q(s, c).

10. *Première définition de* Q (s, c). — Soit, comme dans le paragraphe précédent, c une classe proprement primitive du déterminant $(-\Delta)$ et

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

un représentant de cette classe. Nous définirons, pour $\Re(s) > 1$, la fonction $Q(s, c)$ par la formule

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c) = \sum_{x, y} \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s},$$

où la somme s'étend, comme dans le paragraphe précédent, à tous les systèmes de valeurs positives et négatives de x et y pour lesquels la forme f est impaire et première à Δ.

La série (12) est absolument et uniformément convergente pour toute valeur de s telle que l'on ait $\Re(s) > 1 + \varepsilon$, quelque petit que soit ε; elle représente donc une fonction synectique de s pour $\Re(s) > 1$. Pour $\Re(s) < 1$, la formule (12) ne représente plus rien, mais nous allons voir que $Q(s, c)$ ne cesse pas d'exister. Nous allons chercher, en effet, une représentation de cette fonction valable dans tout le plan s.

11. *Extension de* Q(s, c) *à tout le plan.* — Posons la relation

$$\frac{\Gamma(s)}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} = \int_0^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t}\, t^{s-1} dt.$$

On en déduit, par une sommation relative à x, y, et pour $\Re(s) > 1$,

$$Q(s, c)\Gamma(s) = \int_0^\infty \Phi(t, c)\, t^{s-1} dt.$$

Partageons cette intégrale en deux autres, comme il suit :

$$Q(s, c)\Gamma(s) = \int_1^\infty \Phi(t, c)\, t^{s-1} dt + \int_0^1 \Phi(t, c)\, t^{s-1} dt.$$

La seconde intégrale se met, par la relation (11), sous la forme

$$\frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \int_0^1 t^{s-2} dt + \int_0^1 \theta(t) e^{-\frac{K}{t}} t^{s-2} dt.$$

Comme on a $\Re(s) > 1$, on peut évaluer facilement le premier terme; on change ensuite dans le second la variable d'intégration t en $\frac{1}{t}$. On trouve ainsi

$$\int_0^1 \Phi(t, c)\, t^{s-1} dt = \frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-Kt} t^{-s} dt.$$

Substituons cette valeur dans la dernière équation; nous obtenons

$$(13) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} Q(s, c)\Gamma(s) = \frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \frac{1}{s-1} &+ \int_1^\infty \Phi(t, c)\, t^{s-1} dt \\ &+ \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-Kt} t^{-s} dt. \end{aligned} \right.$$

Comme $\theta\left(\frac{1}{t}\right)$ converge vers une limite finie pour t infini, le second membre converge pour toute valeur de s et fournit, par conséquent, une définition du premier membre valable dans tout le plan.

12. *Propriétés analytiques de* Q(s, c). — La formule (13) nous montre que $Q(s, c)$ est une fonction uniforme de s dans tout le plan, jouissant des propriétés suivantes :

1° Cette fonction possède un pôle unique et simple $s = 1$ et n'a aucun autre point critique;

2° La fonction

$$(s-1)\,Q(s,c)$$

est synectique dans tout le plan et admet comme zéros tous les pôles de $\Gamma(s)$, mais elle peut aussi avoir d'autres racines;

3° Si l'on développe la fonction $(s-1)Q(s,c)\,\Gamma(s)$ par la formule de Maclaurin

$$(s-1)Q(s,c)\,\Gamma(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots,$$

la loi de décroissance des coefficients est donnée par la formule

$$|\,a_n\,| < \frac{1}{n!}\left[(1+\eta)\,ln\right]^n,$$

où η tend vers zéro pour n infini.

En effet, cette loi est exacte pour chacune des intégrales

$$\int_1^\infty \Phi(t,c)\,t^{s-1}dt, \quad \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-Kt} t^s dt,$$

comme on l'a montré dans la démonstration du théorème du n° 16 de la deuxième partie du mémoire. Cette loi subsistera donc aussi pour la combinaison

$$\frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} + (s-1)\int_1^\infty \Phi(t,c)\,t^{s-1}dt + (s-1)\int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-Kt} t^{-s} dt:$$

4° On conclut de cette remarque, comme dans ce théorème du n° 16 que nous venons de rappeler, que la fonction $(s-1)$ $Q(s,c)\,\Gamma(s)$ et par suite aussi que *la fonction entière*

$$(s-1)Q(s,c)$$

ne peuvent être d'un genre supérieur au premier;

5° Une dernière remarque importante est celle-ci : Le résidu de $Q(s,c)$ correspondant au pôle $s=1$ a pour valeur

$$\frac{\pi\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}}$$

et il dépend exclusivement du déterminant $(-\Delta)$ et nullement de la classe c. C'est là un fait très remarquable, sur lequel repose au fond la méthode de Dirichlet pour l'évaluation du nombre des classes, et qui va jouer encore un rôle essentiel dans la suite.

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE DIRICHLET : INFINITÉ DES NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES PAR UNE FORME QUADRATIQUE.

---

§ 1. — *Définition et propriétés des caractères de classes.*

13. Toutes les classes (positives) proprement primitives du déterminant $(-\Delta)$ forment, comme on le sait, un groupe et peuvent s'obtenir chacune une seule fois, au moyen de certaines classes fondamentales :

$$c_1, c_2, \ldots c_r$$

appartenant respectivement aux exposants

$$m_1, m_2, \ldots m_r,$$

en formant le produit

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad c = c_1^{h_1} c_2^{h_2} \ldots c_r^{h_r},$$

où l'expression c_i^0 d'exposant nul représente la classe principale et où l'on donne aux exposants $h_1, h_2 \ldots h_r$ toutes les valeurs comprises dans le tableau

$$\begin{aligned} h_1 &= 0, 1, 2, \ldots m_1 - 1 ; \\ h_2 &= 0, 1, 2, \ldots m_2 - 1 ; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ h_r &= 0, 1, 2, \ldots m_r - 1 . \end{aligned}$$

Soient maintenant $w_1, w_2, \ldots w_r$ des racines quelconques des

équations

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad w_1^{m_1} = 1, \quad w_2^{m_2} = 1, \ldots w_r^{m_r} = 1;$$

nous dirons que le produit

$$k(c) = w_1^{h_1} w_2^{h_2} \ldots w_r^{h_r}$$

est un *caractère* de la classe c. Le nombre de ces caractères sera égal à celui des racines des équations (2), c'est-à-dire au nombre des classes positives proprement primitives. Nous représenterons ce nombre par h :

$$h = m_1 m_2 \ldots m_r.$$

Il est clair que ces définitions supposent qu'il y ait plusieurs classes de formes du déterminant $(-\Delta)$. L'analyse que nous allons faire n'a d'objet que dans cette hypothèse.

14. Les caractères de classes jouissent de propriétés analogues à ceux des caractères d'un nombre (mod. M).

Nous nommerons *caractère principal* celui qui correspond aux racines des équations (2), toutes égales à l'unité

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1, \ldots w_r = 1;$$

nous le représenterons par k_0.

Nous dirons que les deux caractères

$$k(c) \quad \text{et} \quad \frac{1}{k(c)} = \frac{1}{k}(c),$$

formés respectivement avec les racines conjuguées

$$w_1, \quad w_2, \ldots w_r,$$
$$\frac{1}{w_1}, \quad \frac{1}{w_2}, \ldots \frac{1}{w_r},$$

sont conjugués ou opposés. Un caractère qui coïncide avec son opposé (caractère ambigu) ne peut être formé que de racines réelles des équations (2).

On démontre, exactement comme dans le cas des caractères d'un nombre, que les caractères de classes jouissent des propriétés suivantes :

1° Pour tout caractère particulier k, la somme étendue à toutes les classes (positives) proprement primitives est nulle :

$$\sum_c k(c) = 0,$$

sauf pour le caractère principal, auquel cas elle est égale au nombre des classes :

$$\sum_c k_0(c) = h;$$

2° Pour toute classe c, la somme étendue à tous les caractères est nulle :

$$\sum_k k(c) = 0,$$

sauf pour la classe principale, auquel cas elle est égale au nombre des classes :

$$\sum_k k(c^0) = h;$$

3° Pour un même caractère k et deux classes quelconques c et c', on a la relation

$$k(c)k(c') = k(cc').$$

15. Nous allons passer maintenant à une propriété plus particulière des caractères de classes.

Désignons par m un nombre quelconque impair et premier à Δ dont le déterminant $(-\Delta)$ est résidu quadratique. Ce nombre m sera proprement représentable par une forme du déterminant $(-\Delta)$.

Si ϖ désigne le nombre des facteurs premiers différents de m, la congruence

$$z^2 \equiv -\Delta \pmod{m}$$

aura 2^{ϖ} racines distinctes. A chacune d'elles correspond un groupe de représentations du nombre m par des formes du déterminant $(-\Delta)$. En outre, ces représentations se font dans une série de classes qu'il est facile de figurer. Soit

$$m = \alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots,$$

décomposé en ses facteurs premiers et représentons par

$$c_\alpha, \quad c_\beta, \quad c_\gamma, \ldots$$

respectivement une des deux classes opposées capables de représenter $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Les 2^{ϖ} groupes de représentations de m se feront respectivement dans les 2^{ϖ} classes c_m, figurées par les termes du produit développé (*)

$$c_\alpha^{-p} c_\beta^{-q} c_\gamma^{-r} \ldots (1 + c_\alpha^{2p})(1 + c_\beta^{2q})(1 + c_\gamma^{2r}) \ldots,$$

parmi lesquelles plusieurs peuvent coïncider, mais il n'y a pas lieu de tenir compte de cette circonstance pour le moment.

Désignons par $k(c)$ un caractère correspondant à un choix particulier de racines des équations (2) et par

$$\sum k(c_m)$$

une somme relative à ce caractère mais étendue aux 2^{ϖ} classes c_m, différentes ou non, ci-dessus définies. Cette somme jouira de la propriété fondamentale suivante :

On a, pour deux nombres m *et* m′ *premiers entre eux,*

$$\sum k(c_m) \sum k(c_{m'}) = \sum k(c_{mm'}).$$

On vérifie immédiatement cette propriété, en remarquant que, si l'on pose symboliquement

$$\sum c_m = c_\alpha^{-p} c_\beta^{-q} c_\gamma^{-r} \ldots (1 + c_\alpha^{2p})(1 + c_\beta^{2q})(1 + c_\gamma^{2r}) \ldots,$$

(*) Voir, sur ce point, nos *Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques*). (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1896.)

on peut aussi écrire symboliquement, en convenant d'effectuer toutes les multiplications indiquées,

$$\sum k(c_m) = k \sum c_m.$$

La propriété indiquée est alors la conséquence immédiate des deux relations, dont la première seule est symbolique :

$$\sum c_{mm'} = \sum c_m \sum c_{m'}, \quad k(cc') = k(c)\,k(c').$$

§ 2. — *Démonstration d'une équation fondamentale.*

16. Posons, pour un instant,

$$f(m) = \frac{\sum k(c_m)}{m^s};$$

en vertu de la propriété qui fait l'objet du numéro précédent, on aura, pour m et m' premiers entre eux,

$$f(m)\,f(m') = f(mm').$$

Il vient ainsi, d'après une formule générale due à Euler (*),

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \sum_m \frac{\sum k(c_m)}{m^s} = \prod_q (1 + f(q) + f(q^2) + \cdots).$$

La somme du premier membre s'étend à tous les nombres impairs m dont $(-\Delta)$ est résidu; le produit du second membre, à tous les nombres premiers impairs q dont $(-\Delta)$ est résidu quadratique; enfin, on suppose $\mathfrak{R}(s) > 1$, pour que les expressions soient convergentes.

Rappelons-nous maintenant que, pour ces nombres premiers

(*) BACHMANN, *Die analytische Zahlentheorie*, p. 10, form. 17.

q ou leurs puissances q^λ, la somme

$$\sum k(c_q\lambda) = k(c_q)^\lambda + k(c_q^{-1})^\lambda$$

se réduit à deux termes; il vient

$$f(q^\lambda) = \left[k(c_q)^\lambda + k(c_q^{-1})^\lambda\right]\frac{1}{q^{\lambda s}},$$

et le facteur général du produit infini se met sous la forme

$$\begin{aligned} 1 + q^{-s}\left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] + q^{-2s}\left[k(c_q)^2 + k(c_q^{-1})^2\right] + \cdots \\ = -1 + \left[1 + q^{-s}k(c_q) + q^{-2s}k(c_q)^2 + \cdots\right] \\ + \left[1 + q^{-s}k(c_q^{-1}) + q^{-2s}k(c_q^{-1})^2 + \cdots\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, par la sommation de ces deux progressions,

$$-1 + \frac{1}{1 - q^{-s}k(c_q)} + \frac{1}{1 - q^{-s}k(c_q^{-1})},$$

et, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1 - q^{-2s}}{\left[1 - q^{-s}k(c_q)\right]\left[1 - q^{-s}k(c_q^{-1})\right]}.$$

L'équation (4) se met ainsi sous la forme

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \sum_m \frac{\sum k(c_m)}{m^s} = \prod_q \frac{1 - q^{-2s}}{\left[1 - q^{-s}k(c_q)\right]\left[1 - q^{-s}k(c_q^{-1})\right]}.$$

Dans cette équation (5) la somme s'étend aux mêmes nombres m et le produit aux mêmes nombres q que dans (4), c'est-à-dire aux nombres impairs dont $(-\Delta)$ est résidu quadratique.

17. On peut reproduire la somme qui figure aux premiers membres des équations (4) et (5) par une autre voie. Soient, en effet,

$$f_1, \; f_2, \ldots f_h$$

des représentants respectifs des classes

$$c_1, c_2, \dots c_h,$$

positives et pr. pr. du déterminant $(-\Delta)$, dont le nombre sera désigné par h; formons l'expression

$$(6) \qquad \Lambda(s, k) = k(c_1) \sum{}' \frac{1}{f_1^s} + k(c_2) \sum{}' \frac{1}{f_2^s} + \dots + k(c_h) \sum{}' \frac{1}{f_h^s},$$

où la somme relative à l'une quelconque des formes f_i s'étend à tous les systèmes de valeurs de x et y positives ou négatives, *premières entre elles*, pour lesquelles

$$f_i = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

acquiert une valeur impaire première à Δ. Soit alors τ le nombre des solutions de l'équation de Pell, on aura de la même manière qu'on obtient l'équation correspondante dans la détermination du nombre de classes (*)

$$\Lambda(s, k) = \tau \sum_m \frac{\sum k(c_m)}{m^s},$$

et, en vertu de l'équation (5),

$$(7) \quad . \quad . \quad \Lambda(s, k) = \tau \prod_q \frac{1 - q^{-2s}}{[1 - q^{-s} k(c_q)][1 - q^{-s} k(c_q^{-1})]}.$$

18. Il y a encore une dernière transformation à faire subir à cette équation. Désignons, en général, par p les nombres premiers impairs dont $(-\Delta)$ est non-résidu et par n les nombres entiers quelconques, premiers à 2Δ; on aura

$$\sum_n \frac{1}{n^{2s}} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}} \prod_q \frac{1}{1 - q^{-2s}}.$$

Si l'on multiplie membre à membre cette équation avec la

(*) Dirichlet Dedekind, *Zahlentheorie*, 4e édition, § 88.

précédente, on trouve enfin l'ÉQUATION FONDAMENTALE :

$$(8) \quad . \quad . \quad L(s, k) = P(s) \prod_q \frac{1}{[1 - q^{-s} k(c_q)][1 - q^{-s} k(c_q^{-1})]}.$$

Dans cette relation on a posé, en abrégé,

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P(s) = \tau \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}},$$

$$(10) \quad L(s, k) = k(c_1) \sum \frac{1}{f_1^s} + k(c_2) \sum \frac{1}{f_2^s} + \cdots + k(c_h) \sum \frac{1}{f_h^s}.$$

Mais les nouvelles sommes Σf_i^{-s} qui entrent dans l'expression (10) de $L(s, k)$ diffèrent de celles qui entrent dans l'expression (6) de $\Lambda(s, k)$: on doit maintenant attribuer à x et y tous les systèmes de valeurs entières, positives ou négatives, qui donnent à la forme correspondante

$$f_i = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

une valeur impaire et première à Δ. Donc, dans l'expression (10) de $L(s, k)$, on a (n° 10)

$$\sum f_i^{-s} = Q(s, c_i),$$

et $L(s, k)$ se met sous la forme

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad L(s, k) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i) Q(s, c_i).$$

Il est à remarquer que les fonctions $L(s, k)$ qui correspondent à deux caractères opposés k et k^{-1} sont identiques. Il suffit, pour le constater, d'observer qu'on a, dans la formule (8), $k(c_q^{-1}) = k^{-1}(c_q)$.

§ 3. — *Propriétés analytiques des fonctions* $L(s, k)$.

19. Les fonctions $L(s, k)$ correspondent exactement aux fonctions $Z(s, \chi)$ de la deuxième partie du mémoire : comme celles-

ci, elles jouissent de propriétés différentes suivant qu'on a affaire au caractère principal ou à un autre caractère :

1° Dans le cas du caractère principal, on a $k_0(c_i) = 1$, et la fonction

$$L(s, k_0) = \sum_{i=1}^{h} Q(s, c_i)$$

admet le même pôle $s = 1$ que les fonctions Q; elle n'a aucun autre point critique, et la fonction

$$(s - 1) L(s, k_0)$$

est entière dans toute l'étendue du plan.

2° Dans le cas d'un autre caractère, comme le résidu relatif au pôle $s = 1$ est le même pour toutes les fonctions $Q(s, c_i)$ et que la somme des caractères relatifs aux différentes classes est nulle, on voit que le pôle $s = 1$ disparaît pour la fonction

$$L(s, k) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i) Q(s, c_i),$$

qui est entière dans tout le plan.

20. *Développement de* $(s - 1) L(s, k) \Gamma(s)$ *par la formule de Maclaurin, genre de cette fonction.* — Si l'on développe la fonction

$$(s - 1) L(s, k) \Gamma(s) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i)(s - 1) Q(s, c_i) \Gamma(s),$$

par la formule de Maclaurin sous la forme

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots,$$

la loi de décroissance des coefficients sera exprimée par l'inégalité

$$|a_n| < \frac{1}{n!}\left[(1 + \eta) ln\right]^n,$$

car cette loi est vraie (12,3°) pour chacune des fonctions

$(s-1)\,Q(s, c_i)\,\Gamma(s)$, qui figurent au second membre de la dernière équation.

Cette loi, ainsi qu'on l'a vu dans la démonstration du n° 16 de la seconde partie, nous permet d'affirmer que les fonctions entières $(s-1)\,L(s, k)\,\Gamma(s)$ ne peuvent être d'un genre supérieur au premier. Leur produit par la fonction du premier genre $1 : \Gamma(s)$ seront donc du premier genre. D'où la conclusion suivante :

Les fonctions $(s-1)\,L(s, k_0)$, *dans le cas du caractère principal, et* $L(s, k)$ *dans le cas d'un autre caractère, sont des fonctions entières du premier genre.*

21. *Étude des zéros des fonctions* $L(s, k)$. — La loi de croissance des modules des racines successives des fonctions $L(s, k)$ serait difficile à déterminer avec précision ; mais on obtient, sans peine, le seul résultat qui nous soit utile et qui peut s'énoncer comme il suit :

Si l'on représente, en général, par $\rho(k)$ *les zéros de la fonction* $L(s, k)$, *la série*

$$\sum_{\rho} \frac{1}{[\rho(k)]^m}$$

sera absolument convergente pour $m > 1$.

En effet, cette propriété est exacte pour la série étendue à tous les zéros de $(s-1)\,L(s, k)\,\Gamma(s)$, en vertu de la loi de décroissance des coefficients a_n étudiée au numéro précédent ; elle est exacte aussi pour la série étendue aux zéros de $1 : \Gamma(s)$; elle subsiste donc pour la série étendue aux zéros des deux fonctions simultanément, c'est-à-dire à ceux de $L(s, k)$.

Un second point important relatif aux zéros résulte de l'expression de $L(s, k)$ en produit infini par la formule (8). Ce produit est absolument convergent et aucun de ses termes ne peut s'annuler pour $\mathcal{R}(s) > 1$, donc : *Aucune racine* $\rho(k)$ *n'a sa partie réelle supérieure à l'unité.*

Il reste encore à démontrer qu'aucun de ces zéros n'a sa partie réelle égale à l'unité. C'est là un point plus difficile. Nous commencerons par démontrer, par une méthode nouvelle et très simple, qu'aucune des fonctions $L(s, k)$ ne s'annule pour $s = 1$.

§ 4. *Aucune des fonctions* L (s, k) *ne s'annule pour* s = 1.

22. Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation fondamentale (8) et changeons les signes. Il vient

$$(12) \quad . \quad . \; -\frac{L'(s,k)}{L(s,k)} + \frac{P'(s)}{P(s)} = \sum_q \frac{k(c_q)lq}{q^s - k(c_q)} + \sum_q \frac{k(c_q^{-1})lq}{q^s - k(c_q^{-1})}.$$

La fonction P (s) n'a ni pôles ni zéros pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, comme le montre sa définition par la formule (9). Donc, si l'on multiplie l'équation précédente par $(s-1)$ on trouve, sans difficulté, en faisant tendre s vers l'unité,

$$(13) \quad -\lim_{s=1}(s-1)\frac{L'(s,k)}{L(s,k)} = \lim_{s=1}(s-1)\sum_q \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right]\frac{lq}{q^s}.$$

23. Étudions les valeurs que peut avoir le premier membre. Si $k = k_0$ est le caractère principal, le premier membre est égal à l'unité; dans le cas d'un autre caractère, il sera égal à zéro, sauf si $s = 1$ est un zéro d'ordre de multiplicité μ pour la fonction L (s, k), auquel cas le premier membre est égal à $(-\mu)$.

Ajoutons toutes les équations qui se déduisent de la précédente en attribuant successivement aux caractères toutes leurs valeurs, nous obtiendrons une équation finale dont on simplifie facilement les deux membres :

Le premier membre sera, d'après ce qui vient d'être dit, égal à

$$1 - \sum \mu,$$

en désignant par $\Sigma\mu$ la somme des ordres de multiplicité des zéros $s = 1$ pour les fonctions successives L (s, k) qui s'annulent pour cette valeur de s.

Le second membre se simplie aussi, car

$$\sum_k k(c_q) = \sum_k k(c_q^{-1}) = 0,$$

sauf cependant pour les nombres premiers q_0 représentables par la classe principale et pour lesquels

$$\sum_k k(c_{q_0}) = \sum_k k(c_{q_0}^{-1}) = h.$$

Notre équation finale se réduit donc à

$$1 - \sum \mu = 2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_{q_0} \frac{lq_0}{q_0^s}.$$

Pour s réel et > 1, le second membre est essentiellement positif. Donc $\Sigma\mu$ est égal à *zéro* ou à *un* et il n'y a que deux hypothèses possibles :

1° Aucune fonction $L(s, k)$ ne s'annule pour $s = 1$;

2° Une seule des fonctions successives $L(s, k)$, obtenues par la variation du caractère k, s'annule pour $s = 1$ et elle ne peut admettre, dans cette hypothèse, qu'un zéro simple.

24. Plaçons-nous dans la seconde hypothèse, pour en démontrer l'impossibilité.

On voit d'abord que si $L(s, k)$ s'annule pour $s = 1$, le caractère k est nécessairement réel (c'est-à-dire formé d'un produit de racines réelles), sinon, la fonction $L(s, k^{-1})$, qui est identique à $L(s, k)$ (n° 8), s'annulant aussi pour $s = 1$, il y aurait deux fonctions successives admettant cette racine, ce qui est impossible, comme on l'a montré au numéro précédent.

Donc, si une fonction $L(s, k)$ s'annule pour $s = 1$, on aura $k(c) = k(c^{-1})$ et la formule (8) du n° 18 donnera

$$L(s, k) = P(s) \prod_q \left(1 - \frac{k(c_q)}{q^s}\right)^{-2}.$$

Désignons, pour un instant, par q_1 les nombres q pour lesquels $k(c_q) = +1$, par q_2 ceux pour lesquels $k(c_q) = -1$ et raisonnons sur $L(s, k)$ comme sur $Z(s, \chi)$ au n° 67 de la seconde partie, nous trouverons d'abord

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad L(s, k) = P(s) \prod_{q_1} \left(\frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}}\right)^2 \frac{L(2s, k_0)}{L(s, k_0)}.$$

Donc, si l'on remplace $P(s)$ par sa valeur et si l'on pose

$$\text{(II)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-2s}} \prod_{q_1} \left(\frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-s}} \right)^2,$$

il viendra, par la formule (14) précédente,

$$\text{(III)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi(s) = \frac{L(s, k)\, L(s, k_0)}{L(2s, k_0)}.$$

Or, en substituant L à Z, on peut raisonner sur les formules II et III comme sur les formules (2) et (3) du n° 67 de la seconde partie. Donc il est impossible que $L(s, k)$ s'annule pour $s = 1$.

§ 5. *Démonstration du théorème de Dirichlet.*

25. La première hypothèse du n° 23 étant la seule possible, reprenons l'équation (13) et multiplions-la par $k(c)$, ce qui donne

$$-k(c^{-1}) \lim_{s=1} (s-1) \frac{L'(s, k)}{L(s, k)} = \lim_{s=1} (s-1) \sum_{q} \left[k(c_q c^{-1}) + k(c_q^{-1} c^{-1}) \right] \frac{lq}{q^s};$$

le premier membre sera nul, sauf dans le cas du caractère principal ou il est égal à *un*. Ajoutons toutes les équations qui se déduisent de la précédente par l'échange des caractères et rappelons-nous que les deux sommes

$$\sum_{k} k(c_q c^{-1}) \quad \text{et} \quad \sum_{k} k(c_q^{-1} c^{-1})$$

s'annulent respectivement, sauf si $c = c_q$ pour la première ou si $c = c_q^{-1}$ pour la seconde, auxquels cas elles sont respectivement égales à h; il viendra, en désignant en général par q_c les nombres premiers représentables par la classe c :

1° Si c est une classe bilatérale (*) (ambiguë) auquel cas $c = c^{-1}$,

$$\text{(15}^a\text{)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2h \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_c}{q_c^s} = 1;$$

(*) Je me sers du terme *bilatérale* comme traduction du terme *zweiseitige* proposé par M. Dedekind.

2° Si c n'est pas une classe bilatérale,

$$(15^b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_c}{q_c^s} = 1.$$

Ces formules renferment une démonstration nouvelle et plus précise du théorème de Dirichlet. Elles nous permettent, en effet, d'énoncer le résultat suivant :

Toute forme proprement primitive du déterminant négatif $(-\Delta)$ *peut représenter une infinité de nombres premiers.*

La fréquence des nombres premiers ainsi représentables n'est pas la même pour toutes les classes de formes. Elle est la même pour toutes les formes appartenant à des classes bilatérales, la même aussi pour toutes les formes appartenant à des classes non bilatérales, mais elle est moitié moindre dans le premier cas que dans le second. Nous allons donner à ce résultat une expression plus précise encore au chapitre suivant.

CHAPITRE III.

COMPLÉMENT DU THÉORÈME DE DIRICHLET : FRÉQUENCE DES NOMBRES PREMIERS DANS CHAQUE CLASSE.

---

§ 1. — *Les fonctions* L(s, k) *n'ont pas de racines de la forme* $1 + \beta i$ (*).

26. Revenons à l'équation (12), établie pour $\Re\, s > 1$,

$$-\mathrm{D} \log \mathrm{L}(s, k) = -\frac{\mathrm{P}'(s)}{\mathrm{P}(s)} + \sum_q \frac{k(c_q) lq}{q^s - k(c_q)} + \sum_q \frac{k(c_q^{-1}) lq}{q^s - k(c_q^{-1})}.$$

Multiplions cette équation par $s - 1 - \beta i$, β étant réel et différent de zéro; puis faisons tendre s vers $1 + \beta i$. Il viendra, en

---

(*) Nous avons légèrement modifié la rédaction dont le résumé a paru dans le *Bulletin*, pour tenir compte de la modification correspondante apportée à la seconde partie.

négligeant au second membre des termes dont la limite est visiblement nulle,

$$-\lim_{s=1+\beta i}(s-1-\beta i)\,\mathrm{D}\log \mathrm{L}(s,k)=\lim_{s=1+\beta i}(s-1-\beta i)\sum_{q}\left[k(c_q)+k(c_q^{-1})\right]\frac{lq}{q^s}.$$

Le premier membre de cette équation est égal à zéro, si le point $1+\beta i$ n'est pas un zéro de $\mathrm{L}(s,k)$. Si ce point est au contraire un zéro, le premier membre est égal à $-\lambda$, en désignant par λ l'ordre de multiplicité du zéro.

27. Ajoutons ensemble toutes les équations qui se déduisent de la précédente en attribuant aux caractères toutes leurs valeurs. Le second membre de l'équation ainsi obtenue se simplifie, parce que la somme des caractères est nulle, sauf pour les nombres premiers q_0 représentables par la classe principale. Pour ceux-ci, cette somme est égale à h. On trouve donc

$$-\sum\lambda=2h\lim_{s=1+\beta i}(s-1-\beta i)\sum_{q_0}\frac{lq_0}{q_0^s}.$$

Au premier membre, $\Sigma\lambda$ désigne la somme des ordres de multiplicité des zéros $s=1+\beta i$, pour les différentes fonctions qui s'annulent; au second membre, la somme s'étend aux nombres premiers q_0 représentables par la classe principale.

L'équation précédente peut aussi s'écrire sous la forme

$$-\sum\lambda=2h\lim_{s=1}(s-1)\sum_{q_0}\frac{lq_0}{q_0^{s+\beta i}}.$$

Comparons cette équation à la suivante

$$1=2h\lim_{s=1}(s-1)\sum\frac{lq_0}{q_0^s},$$

qui est un cas particulier de l'équation (15ᵃ) du nº 25. Nous pouvons raisonner sur ces deux équations comme on l'a fait sur les équations (2) et (3) aux nᵒˢ 71 et 72 de la seconde partie. On doit nécessairement en conclure $\Sigma\lambda=0$. Par conséquent, aucune des fonctions $\mathrm{L}(s,k)$ ne s'annule, pour $s=1+\beta i$.

§ 2. — *Démonstration et cas particuliers de deux formules générales.*

28. Reprenons encore une fois l'équation (12) du chapitre précédent

$$-\mathrm{D}\log \mathrm{L}(s,k) = -\frac{\mathrm{P}'(s)}{\mathrm{P}(s)} + \sum_q \frac{k(c_q)\,lq}{q^s - k(c_q)} + \sum_q \frac{k(c_q^{-1})\,lq}{q^s - k(c_q^{-1})}.$$

Multiplions les deux membres par

$$\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)},$$

intégrons de $(a - bi)$ à $(a + bi)$ et faisons tendre b vers l'infini.

Nous supposerons que a est > 1 et que u et v ne sont pas des pôles de $\mathrm{D}\log \mathrm{L}(s, k)$. Il vient, dans ces conditions,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a-\infty i} \mathrm{D}\log \mathrm{L}(s,k)\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\mathrm{P}'(s)}{\mathrm{P}(s)}\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \sum \frac{k(c_q)\,lq}{q^s - k(c_q)}\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \sum \frac{k(c_q^{-1})\,lq}{q^s - k(c_q^{-1})}\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)}. \end{aligned}\right.$$

29. Évaluons d'abord le second membre. Si l'on remarque que l'on a

$$-\frac{\mathrm{P}'(s)}{\mathrm{P}(s)} = 2\sum_p \frac{lp}{p^{2s}-1} = 2\sum_p \frac{lp}{p^{2s}} + 2\sum_p \frac{lp}{p^{4s}} + \cdots,$$

$$\sum_q \frac{k(c_q)\,lq}{q^s - k(c_q)} = \sum \frac{k(c_q)\,lq}{q^s} + \sum \frac{k(c_q^2)\,lq}{q^{2s}} + \cdots,$$

on trouve, en reproduisant les raisonnements du n° (74) de la deuxième partie du Mémoire, que ce second membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{2}{u-v}\left[y^u \sum_{p^{2m}<y} \frac{lp}{p^{2mu}} - y^v \sum_{p^{2m}<y} \frac{lp}{p^{2mv}}\right]$$

$$+ \frac{y^u}{u-v} \sum_{q^m<y} \left[k(c_q^m) + k(c_q^{-m})\right] \frac{lq}{q^{mu}} - \frac{y^v}{u-v} \sum_{q^m<y} \left[k(c_q^m) + k(c_q^{-m})\right] \frac{lq}{q^{mv}},$$

les sommes de la première ligne s'étendant à toutes les puissances paires p^{2m}, inférieures à y, des nombres premiers p; celles de la seconde ligne à toutes les puissances entières q^m, inférieures à y, des nombres premiers q.

30. Passons à l'évaluation de l'intégrale du premier membre. Il y a deux cas à distinguer : 1° Dans le cas du caractère principal, on peut raisonner sur $L(s, k_0)$ comme sur $Z(s, \chi_0)$ dans la seconde partie (n° 74); 2° dans le cas d'un autre caractère, on peut raisonner sur $L(s, k)$ comme sur $Z(s, \chi)$. Il suffit donc de changer Z en L et χ en k dans les résultats, c'est à-dire dans les formules (4) et (5) du n° 74 de la seconde partie.

31. *Formules générales.* — En définitive, l'équation (1) se transformera dans l'une des deux suivantes :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(2^a)\quad \left\{\begin{aligned} &2\left[y^u \sum_{q^m<y} \frac{lq}{q^{mu}} - y^v \sum_{q^m<y} \frac{lq}{q^{mv}} + y^u \sum_{p^{2m}<y} \frac{lp}{p^{2mu}} - y^v \sum_{p^{2m}<y} \frac{lp}{p^{2mv}}\right] \\ &\qquad = -y^u \frac{L'(u, k_0)}{L(u, k_0)} + y^v \frac{L'(v, k_0)}{L(v, k_0)} \\ &\qquad + \frac{u-v}{(u-1)(v-1)} y - (u-v) \sum_{\rho(k_0)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}; \end{aligned}\right.$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(2^b)\quad \left\{\begin{aligned} & y^u \sum_{q^m<y} \left[k(c_q^m) + k(c_q^{-m})\right] \frac{lq}{q^{mu}} - y^v \sum_{q^m<y} \left[k(c_q^m) + k(c_q^{-m})\right] \frac{lq}{q^{mv}} \\ & + 2\left[y^u \sum_{p^{2m}<y} \frac{lp}{p^{2mu}} - y^v \sum_{p^{2m}<y} \frac{lp}{p^{2mv}}\right] \\ & = -y^u \frac{L'(u,k)}{L(u,k)} + y^v \frac{L'(v,k)}{L(v,k)} - (u-v) \sum_{\rho\,(k)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{aligned}\right.$$

32. *Premier cas particulier :* $v = 0$, $\Re(u) = 1$. — Si l'on pose $v = 0$ dans les équations précédentes et si l'on suppose que la partie réelle de u soit égale à l'unité, on peut simplifier les équations précédentes de la même manière que les équations correspondantes dans la seconde partie du Mémoire (n°s 76 et 77). On trouvera évidemment, en désignant par ε une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(3^a)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\left[\sum_{q<y} \frac{lq}{q^u - 1} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} lq\right] + 2 \sum_{p^2<y} \frac{lp}{p^{2u} - 1} \\ & \quad = -\frac{L'(u,k_0)}{L(u,k_0)} + \frac{u}{1-u} y^{1-u} + \varepsilon. \end{aligned}\right.$$

2° Dans le cas d'un autre caractère,

$$(3^b)\quad \left\{\begin{aligned} & \sum_{q<y} \frac{k(c_q)}{q^u - k(c_q)} + \sum_{q<y} \frac{k(c_q^{-1})}{q^u - k(c_q^{-1})} \\ & - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] lq + 2 \sum_{p^2<y} \frac{lp}{p^{2u} - 1} \\ & \quad = -\frac{L'(u,k)}{L(u,k)} + \varepsilon. \end{aligned}\right.$$

33. *Deuxième cas particulier :* $u = 1$. — Faisons $u = 1$ dans les équations précédentes. On pourra en simplifier l'écriture, en désignant par $\mathcal{L}$ des quantités qui convergent vers des limites

finies pour y infini. On trouve ainsi, comme aux n°s 78 et 79 de la deuxième partie :

1° Dans le cas du caractère principal,

$$(4^a) \quad \ldots\ldots 2\left[\sum_{q<y}\frac{lq}{q}-\frac{1}{y}\sum_{q<y}lq\right]=ly+\mathfrak{L};$$

2° Pour un autre caractère,

$$(4^b) \quad \sum_{q<y}\left[k(c_q)+k(c_q^{-1})\right]\frac{lq}{q}-\frac{1}{y}\sum_{q<y}\left[k(c_q)+k(c_q^{-1})\right]lq=\mathfrak{L}.$$

34. *Combinaison des équations précédentes.* — Soit c une classe quelconque, positive et proprement primitive. Multiplions (4^b) par $k(c^{-1})$; cette équation devient

$$(5) \quad \sum_{q<y}\left[k(c_qc^{-1})+k(c_q^{-1}c^{-1})\right]\frac{lq}{q}-\frac{1}{y}\sum_{q<y}\left[k(c_qc^{-1})+k(c_q^{-1}c^{-1})\right]lq=\mathfrak{L},$$

sauf dans le cas du caractère principal où l'on retombe sur (4^a). Ajoutons ensemble toutes les équations qui se déduisent de (5) par l'échange des caractères entre eux. Comme la somme

$$\mathop{S}_{k}\left[k(c_qc^{-1})+k(c_q^{-1}c^{-1})\right]=0,$$

sauf pour les nombres premiers q_c représentables par la classe c ou la classe c^{-1}, auquel cas cette somme est égale à

$$\begin{array}{lll} 2h, & \text{si} \quad c=c^{-1} & \text{est une classe bilatérale;} \\ h, & \text{si} \quad c & \text{n'est pas une classe bilatérale,} \end{array}$$

on trouve l'une des deux équations suivantes :

1° Si c est une classe bilatérale,

$$(6^a) \quad \ldots \quad 2h\left[\sum_{q_c<y}\frac{lq_c}{q_c}-\frac{1}{y}\sum_{q_c<y}lq_c\right]=ly+\mathfrak{L}.$$

2° Dans le cas contraire,

$$(6^b) \quad . \quad . \quad . \qquad h\left[\sum_{q_c<y}\frac{lq_c}{q_c}-\frac{1}{y}\sum_{q_c<y}lq_c\right]=ly+\mathcal{L}$$

§ 3. — *Conséquences asymptotiques des formules du paragraphe précédent.*

35. Les équations (6) sont identiques de forme à celle sur lesquelles nous avons raisonné au chapitre IV de la première partie ou au n° (80) de la seconde. Elles conduisent donc respectivement aux conclusions correspondantes :

1° *Si l'on désigne par* h *le nombre des formes positives proprement primitives du déterminant* $(-\Delta)$, *les expressions*

$$\frac{2h}{y}\sum_{q_c<y}lq_c, \quad \textit{si } c \textit{ est une classe bilatérale ;}$$

$$\frac{h}{y}\sum_{q_c<y}lq_c, \quad \textit{dans le cas contraire,}$$

expressions où les sommes s'étendent aux nombres premiers $<$ y *et représentables par la classe* c *ont pour limite l'unité quand* y *tend vers l'infini.*

2° *Les différences correspondantes*

$$2h\sum_{q_c<y}\frac{lq_c}{q_c}-ly \quad \text{ou} \quad h\sum_{q_c<y}\frac{lq_c}{q_c}-ly,$$

tendent vers des limites finies et déterminées quand y *tend vers l'infini;*

3° *Le nombre des nombres premiers* $<$ y *et représentable par la classe* c *a pour expression asymptotique*

$$\frac{1+\varepsilon}{2h}\frac{y}{ly} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\varepsilon}{h}\frac{y}{ly},$$

suivant que c *est une classe bilatérale ou non,* ε *désignant une quantité qui tend vers zéro pour* y *infini.*

36. Considérons encore un caractère k différent du principal et reportons-nous à l'équation (3^b) du n° 32. Cette équation peut maintenant se simplifier. En effet, on peut y négliger la quantité

$$\frac{1}{y^u}\sum_{q<y}\left[k(c_q)+k(c_q^{-1})\right]lq,$$

qui tend vers zéro, pour y infini, quand $\mathfrak{R}(u)=1$. La démonstration est la même qu'au n° (82) de la seconde partie. On trouve ainsi, pour $\mathfrak{R}(u)=1$,

$$\sum_{q<y}\frac{k(c_q)lq}{q^u-k(c_q)}+\sum_{q<y}\frac{k(c_q^{-1})lq}{q^u-k(c_q^{-1})}=-\frac{L'(u,k)}{L(u,k)}-2\sum_{p^2<y}\frac{lp}{p^{2u}-1}+\varepsilon,$$

ε tendant vers zéro pour y infini.

37. En réduisant le premier membre au même dénominateur, on déduit facilement de cette équation le théorème suivant :

La série

$$\sum_q\left[k(c_q)+k(c_q^{-1})\right]\frac{lq}{q^u},$$

étendue à tous les nombres premiers q *dont* $(-\Delta)$ *est résidu, est convergente pour* $\mathfrak{R}(u)=1$ *pourvu que le caractère* k *soit différent du principal.*

NOTE

sur une démonstration de M. Hadamard et sur une simplification de la première partie.

Depuis l'impression de la première partie de notre travail, M. Hadamard a publié un mémoire important *Sur la distribution des zéros de la fonctlon* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmétiques* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1896). Il démontre, lui aussi, que $\zeta(s)$ n'a pas de zéros sur la droite $\mathfrak{R}(s)=1$. Mais cette démonstration, qui ne fait appel qu'aux

propriétés les plus élémentaires de $\zeta(s)$, est plus simple que la nôtre. Elle revient à montrer que si $s = 1 + \beta i$ était un zéro, $s = 1 + 2\beta i$ serait un pôle de $\zeta(s)$, ce qui n'est pas, car cette fonction n'a que le seul pôle $s = 1$.

A cet effet, l'auteur envisage la fonction $\log \zeta(s)$, mais on simplifie encore notablement les raisonnements en considérant, comme nous, la fonction $D \log \zeta(s)$. Voici alors à quoi se réduit cette démonstration que l'on substituera avec avantage à celle qui prend tous les numéros de 30 à 50 de notre première partie.

Soit s réel et > 1, l'expression

$$-\lim_{s=1} (s-1) D \log \zeta(s + \beta i) = \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lp}{p^{s+\beta i}}$$

est égale à 0, à $+1$ ou à -1, suivant que $s = 1 + \beta i$ est un point ordinaire, un pôle ou un zéro de $\zeta(s)$ et réciproquement. Donc, en négligeant la partie imaginaire du second membre, les mêmes conclusions s'appliquent à l'expression

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum \cos \beta lp \frac{lp}{p^s}.$$

D'ailleurs, $s = 1$ étant un pôle, on a

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lp}{p^s} = 1$$

Si, par impossible, $s = 1 + \beta i$ était un zéro, on aurait, en additionnant ces deux expressions,

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum (1 + \cos \beta lp) \frac{lp}{p^s} = 0;$$

donc, en multipliant respectivement tous ces termes, qui sont positifs, par $(1 - \cos \beta lp)$, qui est compris entre *zéro* et *deux*, et remarquant que

$$2(1 + \cos \beta lp)(1 - \cos \beta lp) = 1 - \cos 2\beta lp,$$

on aura aussi

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum (1 - \cos 2\beta lp) \frac{lp}{p^s} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum \cos 2\beta lp \frac{lp}{p^s} = +1,$$

c'est-à-dire que $(1 + 2\beta i)$ serait un pôle de $\zeta(s)$.

La même méthode s'applique aux fonctions $Z(s, \chi)$ et $L(s, k)$, et c'est ainsi que nous avons procédé dans la seconde et dans la troisième partie du Mémoire.

RECTIFICATION A LA PREMIÈRE PARTIE.

Dans une note à la page 70 de la première partie, nous avons révoqué en doute les conclusions obtenues par M. von Mangoldt, dans un article intitulé *Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel: Zu Riemann's Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Nous n'avions pas alors connaissance de l'article complet publié dans le Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. CXIV.

Nous avons reconnu que la démonstration de la formule de Riemann proposée par M. von Mangoldt est inattaquable. Les difficultés que nous avons signalées dans notre appendice sont donc résolues; cependant la plupart des réflexions que l'on y trouvera restent justifiées, en ce qui concerne les conséquences que l'on peut déduire directement de cette formule.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

PAR

M. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain.

QUATRIEME PARTIE

LES NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES PAR UNE FORME QUADRATIQUE DE DÉTERMINANT POSITIF.

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

1898

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1897, t. XXI, 2e partie.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

QUATRIÈME PARTIE

LES NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES PAR UNE FORME QUADRATIQUE DE DÉTERMINANT POSITIF

PRÉLIMINAIRE

Le résumé de cette quatrième partie, que nous avons publié dans la première partie des *Annales*, servira utilement d'introduction. On y verra que toute cette longue analyse converge vers un seul but, la démonstration du théorème du n° 99, dont la simplicité contraste avec les difficultés que rencontre sa démonstration. Nous ajouterons encore les remarques suivantes :

Le chapitre premier n'est qu'une introduction analytique. On y trouvera une série d'intégrales définies simples ou multiples. Elles définissent des fonctions entières vérifiant la condition Θ et ce sont des types simples, auxquels se ramènent les fonctions plus complexes des chapitres suivants.

Le chapitre II présente une étude complète de la fonction $Z_h(s, u, v)$. Cette fonction, qui renferme, comme cas particulier,

la fonction $\zeta(s)$, ne paraît pas avoir été étudiée jusqu'ici. Elle exige nécessairement une analyse compliquée. Celle que nous proposons doit être la plus simple, car elle conduit à énoncer les propriétés de la fonction sous une forme absolument irréductible (n° 33).

Les fonctions $A(s, u, v)$ et $B(s, u, v)$ du chapitre III rentrent dans celles qui ont été étudiées par M. Lipschitz (*). Il y a quelques points de contact entre l'analyse de M. Lipschitz et la nôtre dans les §§ 1 et 2, mais les résultats du § 3 nous sont entièrement personnels.

L'analyse de la fonction $G(s, u, v)$ aux chapitres IV et V était aussi entièrement à faire. Nous nous sommes contenté d'établir les théorèmes qui doivent nous servir au chapitre VI.

La fonction $Q(s, c)$ a été définie par Dirichlet pour s réel. Elle a été étudiée ensuite au même point de vue par MM. Weber et Mayer (**), mais ces géomètres n'ont donné aucune formule qui pût servir de base à notre analyse.

CHAPITRE PREMIER

Définition de la condition Θ. Théorèmes généraux sur les fonctions qui la vérifient

§ 1. *Définitions et théorèmes généraux*

1. *Définition de la condition* Θ. Nous aurons souvent à considérer, dans cette partie du Mémoire, des fonctions entières et plus particulièrement leur développement en série potentielle sous la forme

$$(1). \quad F(s) = A_0 + \frac{A_1}{1} s + \frac{A_2}{1.2} s^2 + \cdots + \frac{A_n}{1.2 \ldots n} s^n + \cdots.$$

(*) *Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.* (Journal de Crelle, CV, 1889.)

(**) Voir la troisième partie, nos 1 et 2.

Il s'agira généralement de prouver que les coefficients A_n de ce développement vérifient une certaine condition que nous allons définir une fois pour toutes et que nous appellerons désormais la condition Θ. Cette condition est la suivante :

On dira que la fonction F(s), *définie par la formule* (1), *vérifie la condition* Θ, *si, tous les coefficients* A *ayant des valeurs déterminées, on peut poser, pour toutes les valeurs de* n *supérieures à un nombre donné* N,

$$(\Theta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \bmod A_n < (\Delta ln)^n,$$

où Δ *est une constante par rapport à* n (*).

Il est à remarquer que si F (s) vérifie la condition Θ, on pourra, en modifiant au besoin la valeur de Δ, faire en sorte que l'inégalité précédente soit satisfaite pour $n \geqq 2$.

2. *Vérification uniforme de la condition* Θ. La fonction considérée F (s) peut aussi dépendre d'un paramètre α, qui varie dans un certain intervalle, ou même dans une certaine région si α est imaginaire. Cette fonction peut alors se désigner par F (s, α).

Si F(s, α) vérifie la condition Θ pour toutes les valeurs de α, on peut poser, pour chacune de ces valeurs de α :

$$F(s) = A_0(\alpha) + \frac{A_1(\alpha)}{1} s + \cdots + \frac{A_n(\alpha)}{1.2..n} s^n + \cdots,$$

et, pour toutes les valeurs de n supérieures à un nombre donné N,

$$\bmod A_n < (\Delta ln)^n.$$

(*) Si la fonction F (s) vérifie la condition Θ, il résulte de la formule de Stirling que l'on peut définir un nombre d indépendant de n et tel qu'on ait, pour $n > 2$,

$$\frac{\bmod A_n}{1.2 \ldots n} < \left(d \frac{ln}{n}\right)^n.$$

C'est sous cette forme, équivalente à la précédente, que j'ai défini la condition Θ, dans le résumé de la quatrième partie du Mémoire publié dans la première partie des *Annales*.

En général, dans cette inégalité, il faudra supposer Δ et N fonctions de α. Mais si l'on peut supposer ces deux quantités indépendantes de α et, en outre, assigner à tous les coefficients A des limites supérieures indépendantes de α, nous disons que $F(s, \alpha)$ vérifie *uniformément* la condition Θ. Nous ajouterons, s'il y a lieu de le préciser, que cette uniformité a lieu, α étant considéré comme variable dans telles conditions déterminées.

3. *Remarques sur les notations.* Nous rencontrerons souvent, dans notre analyse, des fonctions qui nous intéresseront uniquement par la propriété de vérifier la condition Θ. Comme il importe de définir une notation rappelant cette propriété, nous ferons les conventions suivantes, qui seront observées jusqu'à la fin du Mémoire :

Une fonction vérifiant la condition Θ sera représentée d'une manière générale par $\theta(s)$. — Des fonctions différentes vérifiant la condition Θ le seront par $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$, ..., s'il y a lieu de distinguer ces fonctions entre elles; sinon, elles seront toutes également représentées par $\theta(s)$.

Une fonction qui vérifie *uniformément* la condition Θ, pour un système déterminé de valeurs d'un paramètre α, sera représentée par $\theta(s, \alpha)$.

4. *Extension des définitions précédentes.* Les définitions et les notations ci-dessus se généralisent d'elles-mêmes et s'étendent au cas où la fonction considérée de s dépend de plusieurs paramètres α, β, ...

Si la fonction

$$F(s, \alpha, \beta, \ldots) = A_0(\alpha, \beta, \ldots) + \frac{A_1(\alpha, \beta, \ldots)}{1} s + \cdots \frac{A_n(\alpha, \beta, \ldots)}{1.2 \ldots n} s^n + \cdots$$

vérifie la condition

$$\operatorname{mod} A_n < (\Delta ln)^n,$$

pour $n > N$ et pour des valeurs de N et de Δ indépendantes de α, β, ...; si, en outre, on peut assigner à tous les coefficients A

des limites indépendantes de α, β, ..., nous dirons que la fonction $F(s, \alpha, \beta, \ldots)$ vérifie *uniformément* la condition Θ. Dans ce cas, nous la représenterons par la notation $\theta(s, \alpha, \beta, \ldots)$.

Il importe de remarquer que, quand il s'agira de la condition Θ, le développement en série potentielle sera toujours supposé se faire par rapport à la variable s. Il n'y aura donc jamais d'ambiguïté possible dans ces notations. Nous nous servirons cependant de la notation $\theta(\alpha, \beta, \ldots)$ pour désigner une fonction *continue* et *limitée* de α, β, ... qui ne contient pas s, mais ce n'est en réalité que l'application des conventions précédentes au cas particulier où le développement de Taylor se réduit à son premier terme.

5. *Importance de la condition* Θ. Une fonction qui vérifie la condition Θ ne peut être d'un genre supérieur au premier, et si elle a une infinité de racines ρ, la série $\Sigma\rho^m$, étendue à toutes ces racines, sera absolument convergente pour $m < -1$. Ce sont ces conséquences, dont on a déjà vu le rôle essentiel dans les parties précédentes du Mémoire, qui rendent importante pour nous l'étude de la condition Θ. Ces deux conséquences dérivent immédiatement des principes établis par M. Hadamard. Nous les avons appliqués déjà aux n°s 16 et 17 de la deuxième partie du Mémoire et il est inutile de les reproduire encore une fois.

6. Théorème I. *Si une fonction* $\theta(s)$ *vérifie (uniformément) la condition* Θ, *la fonction* $\theta(as + b)$, *obtenue en y remplaçant* s *par une fonction linéaire de* s, *vérifie aussi (uniformément) la condition* Θ.

Théorème II. *Si plusieurs fonctions vérifient (uniformément) la condition* Θ, *il en est aussi de même pour leur somme et pour leur produit.*

Nous allons démontrer ces deux théorèmes, en considérant, dans les démonstrations, toutes les lettres comme des quantités réelles et positives. Le raisonnement fait dans cette hypothèse sera concluant *a fortiori* pour tous les autres cas.

Démonstration du théorème I. Considérons la fonction

$$(1). \quad . \quad \theta(s) = A_0 + A_1 s + \frac{A_2}{1.2} s^2 + \cdots + \frac{A_n}{1.2\,..\,n} s^n + \cdots,$$

avec la condition

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A_n < (\Delta . ln)^n, \qquad \text{pour } n > N.$$

Il est d'abord évident que $\theta(as)$ vérifie la condition Θ, car cette substitution revient à multiplier A_n par a^n et l'on a, par (2),

$$a^n A_n < (a\Delta . ln)^n.$$

En définitive, il suffit de montrer que $\theta(s + b)$ vérifie la condition Θ. Pour faire cette démonstration, on peut supposer que les coefficients de la série (1).

$$A_0, \frac{A_1}{1}, \ldots \frac{A_n}{1.2\ldots n}, \ldots$$

vont constamment en décroissant à partir de $n = N$. En effet, si cette condition n'avait pas lieu, on pourrait remplacer la série (1) par une autre dont les coefficients seraient plus grands que ceux de la série (1), vérifieraient la condition (2) et, en outre, celle que nous venons de dire (*). Le raisonnement fait sur cette nouvelle série sera *a fortiori* concluant pour la série (1). On peut enfin supposer $b < 1$, car le raisonnement fait pour $b < 1$ s'étend de proche en proche à toutes les valeurs de b. Posons, dans cette hypothèse,

$$\theta(s + b) = B_0 + B_1 s + \cdots + \frac{B_n}{1.2\ldots n} s^n + \cdots.$$

(*) Il suffira, par exemple, de faire

$$\frac{A_n}{1.2\ldots n} = \left(d\frac{ln}{n}\right)^n,$$

et de donner à d une valeur fixe suffisamment grande (voir la note page 3). Les coefficients iront en décroissant pour $n > d.ln$.

On aura

$$B_n = \theta^{(n)}(b) = A_n + A_{n+1}\frac{b}{1} + A_{n+2}\frac{b^2}{1.2} + \cdots$$

$$= A_n + \frac{A_{n+1}}{n+1}(n+1)b + \frac{A_{n+2}}{(n+1)(n+2)}\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}b^2 + \cdots.$$

Mais, par hypothèse, les coefficients

$$A_n, \quad \frac{A_{n+1}}{n+1} \quad \frac{A_{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \ldots$$

sont décroissants; on a donc, b étant < 1,

$$B_n < A_n\left[1 + (n+1)b + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}b^2 + \cdots\right]$$

$$< \frac{A_n}{(1-b)^{n+1}} < \frac{1}{1-b}\left[\frac{\Delta}{1-b}ln\right]^n,$$

ce qui prouve le théorème.

Démonstration du théorème II. La première partie du théorème est évidente. Il suffira d'établir que le produit de deux fonctions qui vérifient la condition Θ vérifie aussi la condition Θ. Pour cela, nous allons nous servir d'une représentation symbolique du développement taylorien. Considérons la fonction $\theta(s)$ de la démonstration précédente; en admettant que le premier coefficient $A_0 = 1$ (ce qui n'importe pas à la généralité des raisonnements) et en posant symboliquement $A^n = A_n$, on pourra poser symboliquement aussi

$$\theta(s) = e^{As} = 1 + A_1 s + \cdots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}s^n + \cdots,$$

$$A^n = A_n < (\Delta ln)^n, \qquad \text{pour } n > 1.$$

Pour une autre fonction $\theta_1(s)$, les mêmes conventions donneront

$$\theta_1(s) = e^{Bs} = 1 + B_1 s + \cdots + \frac{B_n}{1.2\ldots n} s^n + \cdots,$$

$$B^n = B_n < (\Delta_1 ln)^n, \qquad \text{pour } n > 1.$$

Il résulte de ces inégalités qu'on aura une limite supérieure d'une expression symbolique entière, à termes positifs, de degré p en A et de degré q en B, en y remplaçant A par Δlp et B par $\Delta_1 lq$, pourvu seulement qu'on ait aussi

$$A_1 < \Delta lp, \qquad B_1 < \Delta_1 lq.$$

Or on a aussi symboliquement

$$\theta(s)\,\theta_1(s) = e^{(A+B)s} = 1 + (A + B)\,s + \cdots + \frac{(A + B)^n}{1.2\ldots n} s^n + \cdots.$$

et, par la remarque précédente, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,

$$(A + B)^n < [(\Delta + \Delta_1)\,ln]^n.$$

Le théorème est donc démontré.

7. Théorème III. *Soit* $\theta(s, \alpha)$ *une fonction qui vérifie uniformément la condition* Θ *dans l'intervalle* (a, b) *du paramètre* α, *l'intégrale à limites finies*

$$\int_a^b \theta(s, \alpha)\, d\alpha$$

vérifie aussi la condition Θ.

Ce théorème est évident. En employant les notations du n° 3, on peut l'exprimer par l'équation

$$\int_a^b \theta(s, \alpha)\, d\alpha = \theta(s).$$

Sous cette forme, le théorème se généralise aisément. Si α est une variable complexe et C un contour fini d'intégration, on a

$$\int_C \theta(s, \alpha)\, d\alpha = \theta(s).$$

Plus généralement encore, en employant les notations du n° 4,

$$\int_a^b \theta(s, \alpha, \beta, \gamma \ldots)\, d\alpha = \theta(s, \beta, \gamma \ldots), \text{ etc.}$$

8. *Exemples.* Une exponentielle quelconque

$$e^{as} = 1 + \frac{a}{1} s + \frac{a^2}{1.2} s^2 + \cdots$$

vérifie évidemment la condition Θ. De plus, si a est variable, cette exponentielle vérifiera uniformément la condition Θ, pourvu que a reste compris entre deux limites finies.

Les fonctions $\sin as$ et $\cos as$ n'étant que des sommes ou des différences d'exponentielles, vérifient aussi la condition Θ et dans les mêmes conditions que l'exponentielle.

9. Théorème IV. *Une intégrale de la forme*

$$\int_1^\infty \theta(x, \alpha, \beta, \ldots)\, e^{-ax} x^s dx,$$

où a *est un nombre positif et où* θ (x, α, β, ...) *désigne une fonction continue et limitée de la variable d'intégration* x *et des paramètres* α, β, ... *est une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ, *les paramètres étant considérés comme variables.*

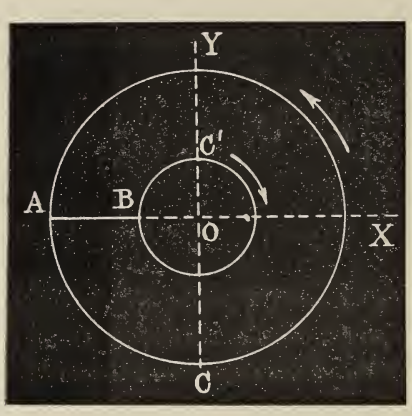
La démonstration de ce théorème est comprise dans celle du n° 16 de la seconde partie du Mémoire.

§ 2. *Transformation générale d'une intégrale définie simple. Application à* $\Gamma(s)$.

10. Soit $f(z)$ une fonction synectique de la variable imaginaire z dans un cercle de rayon b autour de l'origine. L'intégrale

$$\int_0^b f(z)\, z^s dz$$

représente une fonction synectique de la variable s pour $\Re(s) > -1$. Mais la fonction ne cesse pas d'exister pour les autres valeurs de s et son expression valable dans tout le plan peut s'obtenir par les considérations suivantes :



Remarquons que la fonction de z

$$f(z)\, z^s$$

est synectique et uniforme dans la région à *contour simple* limitée par la portion AB de l'axe des x et deux cercles décrits de l'origine O comme centre, l'un C avec le rayon b, l'autre C' avec un rayon infiniment petit. Par conséquent, si nous intégrons la différentielle

$$f(z)\, z^s dz$$

le long du contour ACABC'BA de cette région (C étant supposé parcouru dans le sens direct et C' dans le sens rétrograde), l'intégrale sera nulle. Nous écrirons ce résultat sous la forme

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C) + (AB) - (C') + (BA) = 0.$$

Pour évaluer chacune de ces intégrales partielles, donnons à z, au point A, la valeur initiale $be^{-\pi i}$. En parcourant la circonférence C, z reviendra en A avec la valeur $be^{\pi i}$; l'intégrale (AB), dans (1), a donc pour valeur

$$(AB) = e^{\pi i s} \int_b^0 f(x)\, x^s dx = - e^{\pi i s} \int_0^b f(x)\, x^s dx.$$

Après le parcours de C', z reviendra en B avec l'argument $-\pi$; donc l'intégrale (BA) sera

$$(BA) = e^{-\pi i s} \int_0^b f(x)\, x^s dx.$$

L'intégrale (C') le long du cercle infiniment petit est nulle, pour $\mathfrak{R}(s) > -1$, et nous poserons d'abord

$$(C) = \int_0 f(z)\, z^s dz.$$

L'équation (1) prend ainsi la forme

$$\int_C f(z)\, z^s dz - (e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}) \int_0^b f(x)\, x^s dx = 0,$$

d'où l'on tire

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad \int^b f(x)\, x^s dx = \frac{1}{\sin s\pi} \frac{1}{2i} \int_C f(z)\, z^s dz.$$

Le second membre de cette équation fournit, sous une première

forme, l'expression valable dans tout le plan s que nous nous proposions d'obtenir. En effet, la fonction à intégrer ne peut pas avoir de point critique sur le contour C d'intégration.

Nous allons transformer ce second membre. Dans l'intégrale relative au contour C qui y figure, on a

$$z = be^{i\varphi}, \qquad dz = be^{i\varphi} i d\varphi,$$

donc

$$\frac{1}{2i}\int_C f(z)\, z^s dz = \frac{b^{s+1}}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(be^{i\varphi})\, e^{(s+1)\varphi i} d\varphi,$$

d'où la relation suivante, dont nous aurons souvent à faire usage,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \int_0^b f(z)\, z^s dz = \frac{b^{s+1}}{2 \sin s\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(be^{i\varphi})\, e^{(s+1)\varphi i} d\varphi.$$

11. *Cas où* f (z) *dépend de* s. Supposons que nous ayons maintenant à considérer une intégrale de la forme plus générale

$$\int_0^b f(z, s)\, z^s dz,$$

où l'on désigne par $f(z, s)$ une fonction synectique de z dans le cercle de rayon b et cela pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de s. Les raisonnements et les conclusions du numéro précédent subsistent intégralement. On a donc

$$(4) \quad . \quad . \int_0^b f(z, s)\, z^s dz = \frac{b^{s+1}}{2 \sin s\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(be^{i\varphi}, s)\, e^{(s+1)\varphi i} d\varphi,$$

et le second membre de cette équation fournit une représentation, valable dans tout le plan s, de la fonction de s qui n'est définie dans le premier membre que pour $\Re(s) > -1$.

12. Théorème. *Soit, suivant les notations du* n° 3, θ (s, z) *une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand le paramètre réel ou imaginaire* z *varie dans un cercle de*

rayon b *autour de l'origine; si* $\theta(s, z)$ *est en outre une fonction synectique de* z *dans ce cercle de rayon* b, *la fonction définie pour* $\Re(s) > -1$ *par la formule*

$$F(s) = \sin s\pi \int_0^b \theta(s, z)\, z^s dz$$

est une fonction entière de s *qui vérifie la condition* Θ *et s'exprime, quel que soit* s, *par l'intégrale*

$$F(s) = \frac{1}{2} b^{s+1} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(s, be^{i\varphi})\, e^{(s+1)\varphi i} d\varphi.$$

Démonstration. Ces deux expressions de $F(s)$ sont égales par la formule (4) du numéro précédent. Il suffit donc de démontrer que la seconde vérifie la condition Θ. La quantité qui y figure sous le signe d'intégration, savoir :

$$b^{s+1}\theta(s, be^{i\varphi})\, e^{(s+1)\varphi i},$$

vérifie uniformément la condition Θ, φ variant de $-\pi$ à $+\pi$, car c'est un produit de trois facteurs qui sont dans ce cas (théorème II, n° 6), donc l'intégrale vérifie aussi la condition Θ (théorème III, n° 7).

Remarque. On peut généraliser le théorème précédent en y remplaçant $\theta(s, z)$ par une fonction plus générale $\theta(s, z, \alpha, \beta, \ldots)$ renfermant un plus grand nombre de paramètres variables, et vérifiant toujours *uniformément* la condition Θ. Il en résultera une fonction

$$F(s, \alpha, \beta, \ldots) = \sin s\pi \int_0^b \theta(s, z, \alpha, \beta, \ldots)\, z^s dz,$$

qui vérifiera *uniformément* la condition Θ.

13. *Application à* $\Gamma(s)$. La fonction $\Gamma(1-s)$ peut être définie, pour $\Re(s) > 0$, par l'équation

$$\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-s} dx = \int_0^b + \int_b^\infty e^{-x} x^{-s} dx.$$

Appliquons la transformation (3) du n° 10 à la première intégrale au second membre. Il vient

$$\Gamma(1-s) = -\frac{b^{1-s}}{2\sin s\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-b(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{(1-s)\varphi i}d\varphi + \int_{b}^{\infty} e^{-x}x^{-s}dx.$$

Remplaçons le premier membre, $\Gamma(1-s)$, par $\pi : \Gamma(s)\sin s\pi$, qui lui est égal, et multiplions toute l'équation par $\sin s\pi$; nous obtiendrons

$$(5) \qquad \frac{\pi}{\Gamma(s)} = \sin s\pi\int_{b}^{\infty} e^{-x}x^{-s}dx - \frac{1}{2}b^{1-s}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-b(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{(1-s)\varphi i}d\varphi.$$

Remplaçons la variable d'intégration x par bx; il vient

$$(6) \qquad \frac{\pi b^{s-1}}{\Gamma(s)} = \sin s\pi\int_{1}^{\infty} e^{-bx}x^{-s}dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-b(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{(1-s)\varphi i}d\varphi.$$

Enfin, si l'on fait $b = 1$, on trouve, en particulier,

$$(7) \qquad \frac{\pi}{\Gamma(s)} = \sin s\pi\int_{1}^{\infty} e^{-x}x^{-s}dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{(1-s)\varphi i}d\varphi.$$

Cette expression remarquable de $1 : \Gamma(s)$ est due à Heine. Elle va jouer un rôle important dans les recherches qui vont suivre.

14. Théorème. *La fonction* $1 : \Gamma(s)$ *est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

C'est ce qui résulte de l'une quelconque des trois dernières équations, par exemple de l'équation (7), où le second membre est une somme de deux termes qui vérifient la condition Θ, le premier par les théorèmes des n°s 9 (où l'on changera s en $-s$) et 6, le second par celui du n° 7.

§ 3. *Transformation générale d'une intégrale définie double. Théorèmes qui s'en déduisent.*

15. Théorème. *Soient* x *et* y *deux variables réelles et* f (y) *une fonction continue de* y *dans l'intervalle* (o, b); *soient ensuite* s *une quantité réelle ou imaginaire telle qu'on ait* $\mathfrak{R}(s) > 1$ *et* m *un nombre positif; je dis que l'intégrale double*

$$I = \int_0^b f(y)\,dy \int_1^\infty e^{-y^m x} x^{-s} dx$$

peut se mettre sous la forme

$$\int_0^b f(y)\, y^{m(s-1)} dy \int_{b^m}^\infty e^{-x} x^{-s} dx + m \int_0^b e^{-x^m} dx \int_0^1 f(xy)\, y^{m(s-1)} dy.$$

Démonstration. Changeons d'abord, dans l'intégrale I, la variable d'intégration x en $x : y^m$; il vient

$$I = \int_0^b f(y)\, y^{m(s-1)} dy \int_{y^m}^\infty e^{-x} x^{-s} dx;$$

ensuite, par la subdivision de l'intervalle (y^m, ∞) d'intégration en deux parties,

$$I = \int_0^b f(y)\, y^{m(s-1)} dy \left[\int_{b^m}^\infty + \int_{y^m}^{b^m} e^{-x} x^{-s} dx \right].$$

Par cette formule, I se décompose en deux termes, dont le premier figure aussi comme premier terme dans la décomposition à démontrer. Il nous reste donc à démontrer que les seconds termes sont égaux aussi, ou que l'on a

$$\int_0^b f(y)\, y^{m(s-1)} dy \int_{y^m}^{b^m} e^{-x} x^{-s} dx = m \int_0^b e^{-x^m} dx \int_1^1 f(xy) y^{m(s-1)} dy.$$

Pour cela, changeons x en x^m dans l'intégrale intérieure au premier membre. Celui-ci prend la forme

$$m\int_0^b f(y)\,y^{m(s-1)}dy\int_y^b e^{-x^m}x^{-m(s-1)}\frac{dx}{x}.$$

Écrivons cette expression comme il suit :

$$m\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^b f(y)\,y^{m(s-1)}dy\int_y^b e^{-x^m}x^{-m(s-1)}\frac{dx}{x}.$$

La fonction soumise à une double intégration est maintenant continue dans tout le champ de cette intégration, qui est compris entre les trois droites : $x = y$, $x = b$, $y = \varepsilon$. On peut intervertir les intégrations et l'on trouve

$$m\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^b e^{-x^m}x^{-m(s-1)}\frac{dx}{x}\int_\varepsilon^x f(y)\,y^{m(s-1)}dy.$$

Enfin, si l'on change encore, dans l'intégrale intérieure, y en xy, on trouve

$$m\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^b e^{-x^m}dx\int_{\frac{\varepsilon}{x}}^1 f(xy)\,y^{m(s-1)}dy,$$

c'est-à-dire, sans aucune difficulté pour $\Re(s) > 1$,

$$m\int_0^b e^{-x^m}dx\int_0^1 f(xy)\,y^{m(s-1)}dy,$$

ce qui est bien le second terme de la décomposition à établir.

16. *Cas particulier.* Pour $m = 1$, le théorème précédent fournit l'équation

$$\int_0^b f(y)\,dy\int_1^\infty e^{-yx}x^{-s}dx = \int_0^b f(y)\,y^{s-1}dx\int_b^\infty e^{-x}x^{-s}dx$$
$$+\int_0^b e^{-x}dx\int_0^1 f(xy)\,y^{s-1}dy.$$

17. Théorème. *Désignons, comme au n° 3, par* $\theta(s, y)$ *une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand le paramètre réel ou imaginaire* y *varie dans un cercle de rayon* b *autour de l'origine; si la fonction* $\theta(s, y)$ *est, en outre, une fonction synectique de* y *dans ce cercle, je dis que la fonction définie, pour* $\Re(s) > 1$, *par la formule*

$$F(s) = \sin s\pi \int_0^b \theta(s, y)\, dy \int_1^\infty e^{-yx} x^{-s} dx,$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Ce théorème résulte de la formule précédente (n° 16). Par celle-ci, $F(s)$ se décompose en deux termes :

$$F(s) = \int_b^\infty e^{-x} x^{-s} dx \times \sin s\pi \int_1^b \theta(s, y)\, y^{s-1} dy$$

$$+ \sin s\pi \int_0^b e^{-x} dx \int_0^1 \theta(s, xy)\, y^{s-1} dy.$$

Je dis que chacun de ces deux termes vérifie la condition Θ. Quant au premier, il est un produit de deux facteurs qui vérifient respectivement la condition Θ par les théorèmes du n° 9 pour le premier et du n° 12 pour le second.

Le second terme est l'intégrale, par rapport au paramètre x, de la fonction

$$\sin s\pi \int_0^1 \theta(s, xy)\, y^{s-1} dy,$$

qui vérifie *uniformément* la condition Θ par le théorème du n° 12; donc (n° 7), ce terme lui-même vérifie la condition Θ et le théorème est démontré.

Remarque. On peut généraliser le théorème en y remplaçant la fonction $\theta(s, y)$ par une fonction plus générale $\theta(s, y, \alpha, \beta, \ldots)$,

dépendant de plusieurs paramètres et vérifiant *uniformément* la condition Θ. Il en résultera une fonction $F(s, \alpha, \beta, \ldots)$ qui vérifiera uniformément la condition Θ, α, β,... étant considérés comme variables.

18. Théorème. *Soit, comme au numéro précédent,* $\theta(s, y)$ *une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand le paramètre réel ou imaginaire* y *varie dans un cercle de rayon* b *autour de l'origine; si* $\theta(s, y)$ *est, en outre, une fonction synectique de* y *dans ce cercle, je dis que la fonction définie pour* $\Re(s) > 1$, *par la formule*

$$F(s) = \frac{\pi}{\Gamma(s)} \int_0^b \theta(s, y)\, y^{s-1} dy,$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. La formule (6) du n° 13 devient, en y remplaçant b par y,

$$\frac{\pi y^{s-1}}{\Gamma(s)} = \sin s\pi \int_1^\infty e^{-yx} x^{-s} dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-y(\cos\varphi + i\sin\varphi)} e^{(1-s)\varphi i} d\varphi,$$

ce qui, substitué sous le signe d'intégration dans l'expression de $F(s)$, nous donne la décomposition en deux termes :

$$F(s) = \sin s\pi \int_0^b \theta(s, y)\, dy \int_1^\infty e^{-yx} x^{-s} dx$$
$$- \frac{1}{2} \int_0^b \theta(s, y)\, dy \int_{-\pi}^{\pi} e^{-y(\cos\varphi + i\sin\varphi)} e^{(1-s)\varphi i} d\varphi.$$

Le second terme converge dans tout le plan et vérifie la condition Θ (n° 7). Reste à démontrer que le premier définit une fonction entière vérifiant la condition Θ. C'est là ce qui faisait l'objet du théorème précédent (n° 17).

Remarque. On peut reproduire ici une remarque identique à celle qui termine le numéro précédent.

19. On peut restreindre, comme il suit, les conditions du théorème précédent :

Théorème. *Soit* $\theta(s)$ *une fonction entière de* s, *qui vérifie uniformément la condition* Θ, *quand le paramètre* y *varie des deux manières suivantes :* 1° *dans l'intervalle réel* (0, b); 2° *dans un cercle de rayon* ε *suffisamment petit autour de l'origine. Si la fonction* $\theta(s, y)$ *est, en outre, une fonction synectique de* y *dans ce cercle de rayon suffisamment petit, la formule*

$$F(s) = \frac{\pi}{\Gamma(s)} \int_0^b \theta(s, y)\, y^{s-1} dy$$

définit, pour $\Re(s) > 1$, *une fonction entière dans tout le plan et qui vérifie la condition* Θ.

En effet, faisons la décomposition en deux termes :

$$F(s) = \frac{\pi}{\Gamma(s)} \int_0^\varepsilon \theta(s, y)\, y^{s-1} dy + \frac{\pi}{\Gamma(s)} \int_\varepsilon^b \theta(s, y)\, y^{s-1} dy;$$

le premier terme vérifie la condition Θ par le théorème du numéro précédent; le second, par l'application immédiate des conclusions du n° 7 à l'intégrale qui y figure et de celles du n° 14 au facteur $\pi : \Gamma(s)$.

Remarque. Comme au numéro précédent, on peut aussi reproduire textuellement ici la remarque finale du n° 17.

§ 4. *Application des théorèmes précédents à certains cas particuliers.*

20. Nous allons considérer des intégrales où figure le trinôme du second degré en y

$$p + 2qy + ry^2.$$

Nous ferons, sur cette expression, les hypothèses suivantes :

1° Les trois coefficients p, q, r sont réels, le premier p est positif et non nul;

2° Le discriminant que nous représentons par δ,

$$\delta = q^2 - pr,$$

est positif;

3° L'expression $(p + 2qy + ry^2)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $(0, 1)$ de y.

On a, dans ces conditions, le théorème suivant :

21. Théorème. *La fonction définie, pour* $\Re(s) > 1$, *par la formule*

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{y^{2s-2} dy}{(p + 2qy + ry^2)^s},$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Changeons d'abord y en $1 : y$ dans l'intégrale; il viendra

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_1^\infty \frac{dy}{(py^2 + 2qy + r)^s}.$$

Donnons-nous un nombre Y assez grand pour que la fonction $(py^2 + 2qy + ry^2)$ soit constamment croissante pour $y \geqq Y$ et faisons la décomposition en deux termes :

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_1^Y \frac{dy}{(py^2 + 2qy + r)} + \frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_Y^\infty \frac{dy}{(py^2 + 2qy + r)^s}.$$

Le premier terme est un produit de deux facteurs qui vérifient la condition Θ (n° 14 et n° 7). Il reste simplement à examiner le second terme.

Définissons un nombre positif Z et une nouvelle variable z

par les formules

$$Z = pY^2 + 2qY + r,$$
$$z = py^2 + 2qy + r,$$

et prenons z comme variable d'intégration. On a, puisque z et y sont tous deux positifs pour $y > Y$,

$$y = \frac{-q + \sqrt{\delta + pz}}{p}, \quad dy = \frac{dz}{2\sqrt{\delta + pz}},$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})}\int_Y^\infty \frac{dy}{(p + 2qy + ry^2)^s} = \frac{1}{2\Gamma(s - \frac{1}{2})}\int_Z^\infty \frac{z^{-s}dz}{\sqrt{\delta + pz}},$$

et, en changeant encore la variable d'intégration z en $Z : z$,

$$\frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})}\int_Y^\infty \frac{dy}{(p + 2qy + ry^2)^s} = \frac{Z^{\frac{1}{2}-s}}{2\Gamma(s - \frac{1}{2})}\int_0^1 \frac{z^{s-\frac{5}{2}}dz}{\sqrt{p + \frac{\delta}{Z}z}}.$$

Le second membre de cette équation définit une fonction entière de s qui vérifie la condition Θ, en vertu du théorème précédent n° 19 (où l'on changera s en $s - \frac{1}{2}$). En effet, la fonction

$$\left(p + \frac{\delta}{Z}z\right)^{-\frac{1}{2}}$$

est, vu les hypothèses sur p et δ (20), une fonction continue de z dans l'intervalle (0, 1) et qui est synectique dans un cercle de rayon suffisamment petit autour de l'origine.

Remarque I. Si p, q et r sont variables entre des limites finies, sans cesser de satisfaire aux conditions du n° 20, la fonction $F(s)$ du théorème vérifiera *uniformément* la condition Θ, pourvu que la fonction $(p + 2qy + ry^2)$ ne puisse tendre vers zéro pour aucune valeur de y appartenant à l'intervalle (0, 1), limites comprises.

Remarque II. Les dérivées partielles de $F(s)$ par rapport à p, q, r sont encore des fonctions entières de s qui vérifient la condition Θ.

Cette remarque résulte immédiatement de ce que les dérivées partielles de la fonction

$$\frac{Z^{\frac{1}{2}-s}}{\sqrt{p+\frac{\delta}{Z}z}},$$

par rapport à p, q, r, sont des fonctions continues ou synectiques de z dans les mêmes conditions que cette fonction elle-même. Il résulte encore de là que la remarque I s'applique aussi bien aux dérivées partielles de $F(s)$ qu'à cette fonction elle-même. Par conséquent, si p, q, r varient comme on l'a dit dans la remarque I, les dérivées partielles de $F(s)$ vérifieront *uniformément* la condition Θ.

22. Théorème. *Le trinôme* $(p + 2qy + ry^2)$ *étant assujetti aux conditions du n° 20, la fonction définie, pour* $\Re(s) > 1$, *par l'intégrale double*

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \frac{dy}{(p+2qy+ry^2)^s}\int_1^\infty x^{-s}e^{-y^2x}dx,$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Appliquons la décomposition du n° 15, où nous ferons $m = 2$ et $f(y) = (p + 2qy + ry^2)^{-s}$; il viendra

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \frac{y^{2s-2}dy}{(p+2qy+ry^2)^s}\times\int_1^\infty e^{-x}x^{-s}dx$$

$$+\frac{2}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^1 \frac{y^{2s-2}dy}{(p+2qxy+rx^2y^2)^s}.$$

La fonction F (s) est ainsi décomposée en deux termes. Le premier terme vérifie la condition Θ, car c'est un produit de deux facteurs qui sont dans ce cas, le premier par le théorème du n° 21 et le second par celui du n° 9 (où l'on changera s en $-s$).

Le second terme de F (s) vérifie aussi la condition Θ, car, quand x varie de 0 à 1, la fonction

$$\frac{1}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \frac{y^{2s-2}}{(p+2qxy+rx^2y^2)^s} = \theta(s, x)$$

est, par le théorème du n° 21 qui précède (remarque I), une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ. Ce second terme est donc de la forme

$$2\int_0^1 e^{-x^2}\theta(s, x)\,dx,$$

et il vérifie la condition Θ par le théorème du n° 7.

Remarque I. Si les coefficients p, q, r du trinôme $(p+2qy+ry^2)$ sont variables entre des limites finies, la fonction F (s) vérifiera uniformément la condition Θ, pourvu que le trinôme reste assujetti aux conditions du n° 20 et ne puisse tendre vers zéro, pour aucun système de valeurs de p, q, r et y (y variant entre 0 et 1). En effet, par la remarque I du numéro précédent, la fonction θ (s, x) de la démonstration ci-dessus conserve les propriétés que nous lui avons attribuées.

Remarque II. Les dérivées partielles par rapport aux paramètres p, q et r de la fonction F (s) du théorème sont encore des fonctions entières de s qui vérifient la condition Θ.

En effet, par la remarque II du numéro précédent, les dérivées partielles de la fonction θ (s, x) de la démonstration ci-dessus conservent aussi les propriétés que nous avons attribuées à cette fonction elle-même.

On voit, en outre, que si p, q, r sont variables comme dans la remarque précédente, les dérivées partielles en question vérifieront aussi uniformément la condition Θ.

CHAPITRE II

Étude de la fonction $Z_h(s, u, v)$ et de la fonction auxiliaire $\psi_5(\alpha, t)$

---

§ 1. *Étude de la fonction* $\psi_5(\alpha, t)$

23. *Relation entre deux intégrales définies.* Soit $z = x + yi$ une variable imaginaire; intégrons la fonction

$$e^{z^2 t} dz$$

le long du rectangle ayant pour côtés : $x = 0$, $x = \alpha$; $y = 0$, $y = \beta$. Cette intégrale étant nulle, on aura l'équation

$$\int_0^\alpha e^{x^2 t} dx + i \int_0^\beta e^{(\alpha + yi)^2 t} dy = i \int_0^\beta e^{-y^2 t} dy + \int_0^\alpha e^{(x+\beta i)^2 t} dx.$$

Égalons les parties réelles et faisons tendre β vers l'infini; nous trouverons la relation connue

$$\int_0^\infty e^{-y^2 t} \sin(2\alpha y t)\, dy = e^{-\alpha^2 t} \int_0^\alpha e^{x^2 t} dx.$$

Changeons t en πt et α en $\frac{k}{t}$; il vient

$$\int_0^\infty e^{-y^2 \pi t} \sin(2k\pi y)\, dy = e^{-k^2 \frac{\pi}{t}} \int_0^{\frac{k}{t}} e^{x^2 \pi t} dx.$$

Changeons encore la variable d'intégration x en $kx : t$; nous

aurons

$$\int_0^\infty e^{-y^2\pi t} \sin(2k\pi y)\, dy = \frac{k}{t}\int_0^1 e^{-(1-x^2)k^2\frac{\pi}{t}} dx,$$

puis enfin, par la substitution $1 - x^2 = z$,

$$(1). \quad \int_0^\infty e^{-y^2\pi t} \sin(2k\pi y)\, dy = \frac{k}{2t}\int_0^1 e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}}.$$

24. *Définition de la fonction* $\psi_3(\alpha, t)$. *Son développement en série trigonométrique.* Nous avons défini, dans la deuxième partie du Mémoire, les fonctions $\psi_1(\alpha, x)$ et $\psi_2(\alpha, x)$; nous allons ajouter à celles-là une nouvelle fonction qui est dans une étroite relation avec elles.

Soient α une quantité réelle, *comprise entre* 0 *et* 1, et t une quantité réelle et positive quelconque. Nous posons, par définition,

$$(2). \quad \ldots \quad \psi_3(\alpha, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi t} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-\alpha)^2\pi t}.$$

Cette fonction n'est plus, comme $\psi_1(\alpha, x)$ ou $\psi_2(\alpha, x)$, une fonction périodique de α; c'est pourquoi nous nous sommes bornés à l'intervalle $(0, 1)$ du paramètre α. Cette fonction jouit évidemment de la propriété fonctionnelle

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad \psi_3(1-\alpha, t) = -\psi_3(\alpha, t);$$

l'étude de la fonction dans l'intervalle $(0, 1)$ se ramène ainsi à l'examen de l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$.

On peut assigner à cette fonction des limites supérieure et inférieure indépendantes de α et de t. Pour le montrer, écrivons, en prenant alternativement un terme dans chacune des deux sommes,

$$\psi_3(\alpha, t) = e^{-\alpha^2\pi t} - e^{-(1-\alpha)^2\pi t} + e^{-(1+\alpha)^2\pi t} - e^{-(2-\alpha)^2\pi t} + \cdots$$

Si l'on suppose $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, ces termes sont constamment et indéfiniment décroissants. On a donc, dans l'intervalle $(0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2})$,

$$e^{-\alpha^2\pi t} > \psi_3(\alpha, t) > e^{-\alpha^2\pi t} - e^{-(1-\alpha)^2\pi t},$$

et, par conséquent, quel que soit t,

$$1 > \psi_3(\alpha, t) > 0.$$

On aurait de même dans l'intervalle $(\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 1)$

$$0 > \psi_3(\alpha, t) > -1.$$

Nous pouvons développer cette fonction en série trigonométrique par rapport à α dans l'intervalle (0,1). En vertu de la relation (3), ce développement sera de la forme

$$\psi_3(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\pi\alpha,$$

les coefficients ayant pour valeurs

$$b_k = 2\int_0^1 \psi_3(\alpha, t) \sin(2k\pi\alpha)\, d\alpha = 4\int_0^\infty e^{-\alpha^2\pi t} \sin(2k\pi\alpha)\, d\alpha.$$

Par la formule (1) du numéro précédent, ces coefficients deviennent

$$b_k = \frac{2k}{t}\int_0^1 e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}}.$$

On a donc le développement trigonométrique

$$(4). \quad . \quad . \quad \psi_3(\alpha, t) = \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\int_0^1 e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}}.$$

25. *Relation entre* $\psi_3(\alpha, t)$ *et* $\psi_2(\alpha, x)$. Pour l'obtenir, il faut montrer qu'on peut intervertir les signes de sommation et d'intégration dans la formule précédente.

A cet effet, soit ε un nombre positif arbitrairement petit, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi\frac{z}{t}},$$

(où t est supposé donné) converge uniformément dans l'intervalle $(\varepsilon, 1)$ de la variable z (ce qui n'avait pas lieu dans l'intervalle de 0 à 1). On a donc, puisque l'interversion des signes est permise dans cet intervalle $(\varepsilon, 1)$,

$$\psi_3(\alpha, t) = \frac{2}{t}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi\frac{z}{t}}$$
$$+ \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}},$$

et, en faisant tendre ε vers zéro,

$$(5). \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_3(\alpha, t) &= \frac{2}{t}\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \\ &+ \lim_{\varepsilon=0} \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}}. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière limite est nulle. Pour le montrer, changeons z en $z : k^2$; cette limite s'écrira

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi\alpha}{k} \int_{0}^{k^2\varepsilon} e^{-\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{z}{k^2}}}.$$

Puis, par une intégration par parties portant sur l'exponentielle, cette expression se met sous la forme

$$\frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon=0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi\alpha}{k}\left[1 - \frac{e^{-k^2\pi\frac{\varepsilon}{t}}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right] + \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon=0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi\alpha}{k^3}\int^{k^2\varepsilon} \frac{e^{-k^2\pi\frac{z}{t}}\,dz}{\left(1-\frac{z}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme la série Σk^{-3} est absolument convergente, le second terme tend visiblement vers zéro avec ε. Quant au premier, en posant $x = e^{-\frac{\pi\varepsilon}{t}}$, il peut se réduire à la différence

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi\alpha}{k} - \frac{2}{\pi}\lim_{x=1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi\alpha}{k}x^{k^2}$$

Dans celle-ci, le second terme est une série potentielle convergente pour $x = 1$. Sa limite pour $x = 1$ coïncide avec sa valeur pour $x = 1$, en vertu d'un théorème classique dû à Abel. Donc la différence ci-dessus est nulle et l'équation (5) se réduit à

$$\psi_3(\alpha, t) = \frac{2}{t}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}}\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi\frac{z}{t}}.$$

Changeons la variable d'intégration z en tz ; il viendra

$$\psi_3(\alpha, t) = 2\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-tz}}\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi z},$$

c'est-à-dire, par la formule (4) du n° 5 de la deuxième partie du Mémoire,

$$\psi_3(\alpha, t) = \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-zt}}\,\frac{\psi_2\left(\alpha, \frac{1}{z}\right)}{z\sqrt{z}},$$

et enfin, en changeant z en $1 : z$,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \psi_3(\alpha, t) = \int_t^{\infty} \psi_2(\alpha, z)\,\frac{dz}{\sqrt{z-t}}.$$

Telle est la relation fondamentale qui lie les deux fonctions $\psi_2(\alpha, z)$ et $\psi_3(\alpha, t)$, pour $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$.

Remarque. On peut donner à la formule (6) une forme plus

simple en apparence, quoique moins pratique, en y remplaçant la variable d'intégration z par $(z^2 + t)$. Il vient

$$\psi_3(\alpha, t) = 2\int_t^\infty \psi_2(\alpha, z^2 + t)\, dz.$$

§ 2. *Étude de la fonction* $Z_h(s, u, v)$

26. *Définition de* $Z_h(s, u, v)$. Cette fonction dépend de trois paramètres u, v, γ qui sont réels et compris tous les trois entre 0 et 1 (limites exclues pour γ seulement). Elle est définie, pour $\mathcal{R}(s) > \frac{1}{2}$, par la formule

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad Z_h(s, u, v) = \sum_{x=h}^{\infty} \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2]^s},$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs positives et entières de x égales ou supérieures à un entier donné h.

Cet entier h sera supposé suffisamment grand pour qu'on ait

$$h > \frac{1}{1 - \sqrt{\gamma}}, \quad \text{d'où} \quad h > \sqrt{\gamma}(h+1),$$

ce qui est toujours possible, puisqu'on a, par hypothèse, $\sqrt{\gamma} < 1$. Dans ces conditions, la fonction

$$(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2$$

est essentiellement positive pour $x \geqq h$, et il n'y a pas de difficulté dans la définition de la fonction $Z_h(s, u, v)$, qui sera réelle en même temps que s. Cette fonction est analogue à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, mais elle présente des propriétés plus complexes que nous allons chercher à éclaircir.

27. *Transformation de la formule* (1). La formule (1) se

transforme d'abord dans la suivante :

$$(2). \quad Z_h(s, u, v) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} dt \sum_{x=h}^{\infty} e^{-[(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2]\pi t}.$$

Nous allons d'abord simplifier l'écriture de l'exponentielle qui est sous le signe d'intégration. On a

$$\begin{aligned}(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2 &= (x+u)^2 - \gamma(x+u+v-u)^2 \\ &= (1-\gamma)(x+u)^2 - 2\gamma(x+u)(v-u) - \gamma(v-u)^2 \\ &= (1-\gamma)\left[\left(x+u-\frac{\gamma(v-u)}{1-\gamma}\right)^2 - \gamma\left(\frac{v-u}{1-\gamma}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Posons

$$\gamma\left(\frac{v-u}{1-\gamma}\right)^2 = \beta^2, \quad u - \frac{\gamma(v-u)}{1-\gamma} = e + \alpha,$$

où α est une fraction comprise entre *zéro* et *un* et e la partie entière de $u - \frac{\gamma(v-u)}{1-\gamma}$, c'est-à-dire un entier positif ou négatif. Cet entier sera $< h$ en valeur absolue et l'on aura

$$(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2 = (1-\gamma)\left[(x+e+\alpha)^2 - \beta^2\right],$$

d'où

$$Z_h(s, u, v) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} dt e^{\beta^2(1-\gamma)\pi t} \sum_{x=h+e}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2(1-\gamma)\pi t}.$$

Changeons encore la variable d'intégration t en $t : (1-\gamma)$; nous aurons

$$(3) \quad Z_h(s, u, v) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} dt e^{\beta^2 \pi t} \sum_{x=h+e}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2 \pi t}.$$

Cette formule en donne immédiatement une autre. Remplaçons u et v par leurs compléments $(1-u)$ et $(1-v)$; e se change en $-e$, α en $1-\alpha$ et β^2 ne change pas.

On a donc

$$(3^{\text{bis}})\quad Z_h(s,\,1-u,\,1-v)=\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}dt\,e^{\beta^2\pi t}\sum_{x=h+1-e}^{\infty}e^{-(x-\alpha)^2\pi t}.$$

Les propriétés de $Z_h(s,\,u,\,v)$ vont découler très aisément des deux théorèmes suivants, dont le premier surtout sera important pour la suite.

28. Théorème. *La fonction*

$$Z_h(s,\,u,\,v)-Z_h(s,\,1-u,\,1-v)$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* u *et* v *varient dans l'intervalle* $(0,1)$.

Démonstration. La méthode que nous allons suivre pour démontrer le théorème conduirait, en poussant les calculs jusqu'au bout (ce que nous ne ferons pas), à la formation d'expressions capables de représenter la fonction dans tout le plan. Cette méthode consistera à décomposer la fonction en une somme d'autres qui vérifieront séparément les conditions du théorème.

Posons d'abord

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
Y_1(s)&=\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_1^\infty t^{s-1}dt\,e^{\beta^2\pi t}\left[\sum_{x=h+e}^{\infty}e^{-(x+\alpha)^2\pi t}-\sum_{x=h-e+1}^{\infty}e^{-(x-\alpha)^2\pi t}\right],\\
Y_2(s)&=\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 t^{s-1}dt\,e^{\beta^2\pi t}\left[\sum_{x=h+e}^{\infty}e^{-(x+\alpha)^2\pi t}-\sum_{x=h-e+1}^{\infty}e^{-(x-\alpha)^2\pi t}\right].
\end{aligned}\right.$$

On aura évidemment, en vertu des formules (3) et (3bis), où l'on décomposera l'intervalle d'intégration en deux parties $(0,\,1)$ et $(1,\,\infty)$,

$$Z_h(s,\,u,\,v)-Z_h(s,\,1-u,\,1-v)=Y_1(s)+Y_2(s).$$

Le premier terme $Y_1(s)$ ne donne lieu à aucune difficulté :

son expression converge dans tout le plan s (*) et il définit une fonction qui vérifie uniformément la condition Θ par le théorème du n° 9.

Passons au second terme $Y_2(s)$, dont l'étude est plus difficile. En ajoutant des termes en nombre $2h$, puis soustrayant ces termes, on peut écrire, eu égard à la formule (2) du n° 24,

$$Y_2(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t}\psi_3(\alpha, t)\, t^{s-1}dt$$

$$+ \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\left[\sum_{x=1}^{h-\varepsilon}\int_0^1 e^{[\beta^2-(x-\alpha)^2]\pi t}t^{s-1}dt - \sum_{x=0}^{h+\varepsilon-1}\int_0^1 e^{[\beta^2-(x+\alpha)^2]\pi t}t^{s-1}dt\right].$$

Nous avons écrit en seconde ligne une somme de $2h$ termes qui vérifient *uniformément* la condition Θ, α et β (et par suite u, v) étant considérés comme variables, cela en vertu du théorème du n° 18, qui s'applique à chacun d'eux. La démonstration du théorème actuel se réduit donc à celle du théorème que voici :

29. Théorème. *La fonction* $T(s)$, *définie par la formule*

$$T(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t}\psi_3(\alpha, t)\, t^{s-1}dt,$$

est une fonction entière de s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* α *varie dans l'intervalle* $(0, 1)$ *et* β *entre des limites finies.*

(*) Pour se rendre compte de cette convergence, on se rappellera que l'on a, pour les valeurs de x qui entrent dans les sommes, sous le signe d'intégration,

$$(x+\alpha)^2 - \beta^2 = \frac{(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2}{1-\gamma} > \frac{h-\gamma(h+1)}{1-\gamma} > 0,$$

et une inégalité semblable pour $(x-\alpha)^2 - \beta^2$. Dans les exponentielles en t, le coefficient de t ne peut donc tendre vers zéro et est essentiellement négatif, ce qu assure la convergence des intégrales dans l'intervalle (l, ∞) de t.

Pour démontrer ce théorème, remplaçons $\psi_3(\alpha, t)$ par sa valeur (6) au n° 25, savoir

$$\psi_3(\alpha, t) = \int_t^\infty \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}} = \int_t^1 + \int_1^\infty \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}},$$

et posons, en abrégé,

$$\left\{ \begin{aligned} T_1(s) &= \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 e^{\beta^2 \pi t} t^{s-1} dt \int_t^1 \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}}, \\ T_2(s) &= \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 e^{\beta^2 \pi t} t^{s-1} dt \int_1^\infty \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}}; \end{aligned} \right.$$

on aura la décomposition

$$T(s) = T_1(s) + T_2(s).$$

Montrons d'abord que le second terme $T_2(s)$ vérifie la condition Θ. Pour cela, supposons pour un instant que α ne puisse tendre ni vers *zéro* ni vers *un*; la formule (2e partie, n° 3)

$$\psi_2(\alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2 \pi z}$$

met en évidence que la fonction

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad e^{\beta^2 \pi t} \int_1^\infty \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}} = \theta_2(t, \alpha, \beta),$$

est une fonction continue de α, β, t dans l'intervalle (0, 1) de t et une fonction synectique de t dans un cercle de rayon suffisamment petit autour de l'origine.

Donc la fonction

$$(6). \quad . \quad . \quad T_2(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \theta_2(t, \alpha, \beta)\, t^{s-1} dt$$

est, par le théorème du n° 19, une fonction entière de s qui vérifie uniformément la condition Θ.

J'ajoute que cette conclusion subsiste si α peut tendre vers *zéro* ou vers *un*. Dans ce cas, il y a, dans l'expression de $\psi_2(\alpha, z)$ donnée ci-dessus, deux termes et deux seulement, où le coefficient de z peut tendre vers zéro, et qui réclament un nouvel examen, savoir

$$\alpha e^{-\alpha^2 \pi z} \qquad \text{et} \qquad (1-\alpha)\, e^{-(1-\alpha)^2 \pi z}.$$

Les difficultés relatives à ces deux termes se résolvent de la même façon, de sorte qu'il suffit de considérer le premier.

Il donne dans l'expression de $\theta_2(t, \alpha, \beta)$ le terme

$$e^{\beta^2 \pi t} \int_1^\infty \alpha e^{-\alpha^2 \pi z} \frac{dz}{\sqrt{z-t}} = e^{\beta^2 \pi t} \int_{\alpha^2}^\infty e^{-\pi z} \frac{dz}{\sqrt{z-\alpha^2 t}}$$

$$= e^{\beta^2 \pi t - \pi \alpha^2} \int_0^\infty e^{-\pi z} \frac{dz}{\sqrt{z+\alpha^2(1-t)}},$$

et, sous cette dernière forme, il saute aux yeux : 1° que ce terme est encore une fonction continue de t, de α et de β, 2° que c'est une fonction synectique de t dans le voisinage de l'origine. Il n'y a donc rien à changer à nos conclusions.

Passons à l'examen du premier terme $T_1(s)$. En renversant l'ordre des intégrations, il devient

$$T_1(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 \psi_2(\alpha, z)\, dz \int_0^z t^{s-1} e^{\beta^2 \pi t} \frac{dt}{\sqrt{z-t}};$$

puis, en changeant t en tz,

$$T_1(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 \psi_2(\alpha, z)\, z^{s-\frac{1}{2}} dz \int_0^1 e^{\beta^2 \pi t z} \frac{t^{s-1} dt}{\sqrt{1-t}};$$

puis, en changeant encore z en $1 : z$ et renversant l'ordre d'intégration,

$$T_1(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 \frac{t^{s-1} dt}{\sqrt{1-t}} \int_1^\infty e^{\beta^2 \pi \frac{t}{z}} \psi_2\left(\alpha, \frac{1}{z}\right) z^{-s-\frac{3}{2}} dz.$$

Mais la formule (4) du n° 5 de la seconde partie, qui se met sous la forme

$$z^{-\frac{3}{2}}\psi_2\left(\alpha, \frac{1}{z}\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2\pi z}\sin 2k\pi\alpha,$$

met en évidence : 1° que la fonction

$$(7). \quad . \quad . \quad \int_1^{\infty} e^{\beta^2\pi\frac{t}{z}}\left[z^{-\frac{3}{2}}\psi_2\left(\alpha, \frac{1}{z}\right)\right] z^{-s}dz = \theta_1(s, t, \alpha, \beta)$$

est une fonction entière de s dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition Θ (application du théorème du n° 9) ; 2° que c'est, pour toute valeur de s, une fonction synectique de t. Donc la fonction

$$(8). \quad . \quad . \quad T_1(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{t^{s-1}dt}{\sqrt{1-t}}\theta_1(s, t, \alpha, \beta)$$

est, par le théorème du n° 19, une fonction entière de s qui vérifie uniformément la condition Θ. Le théorème est donc démontré.

30. *Remarque.* La fonction $T(s)$ du théorème précédent dépend aussi des trois paramètres α, β, γ ; ses dérivées partielles par rapport à ces trois paramètres sont aussi des fonctions entières de s qui vérifient uniformément la condition Θ, quand α varie dans l'intervalle (0, 1) et β entre des limites finies quelconques.

Nous avons fait, en effet, la décomposition

$$T(s) = T_1(s) + T_2(s).$$

Notre remarque s'applique à $T_2(s)$, en vertu de la formule (6), parce que les dérivées partielles de $\theta_2(t, \alpha, \beta)$ par rapport à α et β jouissent, comme le montre la formule (5), des propriétés que nous avons attribuées à cette fonction elle-même.

Notre remarque s'applique aussi à $T_1(s)$, en vertu de la formule (8), parce que les dérivées partielles par rapport à α et β de la fonction $\theta_1(s, t, \alpha, \beta)$, définie par la formule (7), jouissent aussi des propriétés que nous avons attribuées à cette fonction elle-même.

31. Théorème. *On peut former les dérivées partielles par rapport aux trois paramètres* u, v *et* γ *de la fonction*

$$Z_h(s, u, v) - Z_h(s, 1 - u, 1 - v),$$

qui dépend de ces trois paramètres. Ces nouvelles fonctions sont encore des fonctions entières de s *dans tout le plan qui vérifient uniformément la condition* Θ, *les paramètres* u *et* v *étant considérés comme variables dans l'intervalle* (0, 1).

Dans les numéros 28 et 29, nous avons décomposé la fonction, qui figure dans l'énoncé du théorème, dans la somme suivante :

$$Y_1(s) + T(s) + \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \left[\sum_{x=1}^{h-e} \int_0^1 e^{[\beta^2 - (x-\alpha)^2]\pi t} t^{s-1} dt \right.$$
$$\left. - \sum_{x=0}^{h+e-1} \int_0^1 e^{[\beta^2 - (x+\alpha)^2]\pi t} t^{s-1} dt \right].$$

Tous ces termes dépendent de trois paramètres α, β et γ. Mais les paramètres α et β (n° 27) sont des fonctions de u, v et γ ayant des dérivées partielles bien déterminées et indépendantes de s. Il suffit donc de démontrer que les dérivées partielles de la somme ci-dessus par rapport à α et β et γ vérifient la condition Θ.

La chose a été faite pour $T(s)$ au numéro précédent. En ce qui concerne $Y_1(s)$, on se reportera à la formule (4) du n° 28 et l'on verra que l'on peut raisonner sur les dérivées comme sur la fonction elle-même. Enfin, pour tous les autres termes, la conclusion est immédiatement apparente, les dérivées tombant

comme les termes eux-mêmes sous l'application du théorème du n° 18.

32. Théorème. *La fonction*

$$Z_h(s, u, v) + Z_h(s, 1-u, 1-v),$$

peut, pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, *se mettre sous la forme*

$$\theta(s, u, v) + \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 e^{\beta^2 \pi t} t^{s-\frac{3}{2}} dt,$$

où θ (s, u, v) *désigne une fonction entière de* s *dans toute l'étendue du plan et qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand les deux paramètres* u *et* v *varient dans l'intervalle* (0, 1).

Démonstration. En ajoutant membre à membre les formules (3) et (3bis) du n° 27, puis en ajoutant dans le second membre des termes qui se détruisent comme au n° 28, et ayant égard à la relation (2e partie, n° 2)

$$\psi_1(\alpha, t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2 \pi t} + \sum_{x=1}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2 \pi t},$$

on mettra la fonction $Z_h(s, u, v) + Z_h(s, 1-u, 1-v)$ qui nous intéresse sous la forme suivante (correspondant à la décomposition du n° 28) :

$$\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_1^{\infty} t^{s-1} dt e^{\beta^2 \pi t} \left[\sum_{x=h+e}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2 \pi t} + \sum_{x=h+1-e}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2 \pi t} \right]$$

$$- \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \left[\sum_{x=0}^{h+e-1} \int_0^1 e^{[\beta^2 - (x-\alpha)^2] \pi t} t^{s-1} dt + \sum_{x=1}^{h-e} \int_0^1 e^{[\beta^2 - (x-\alpha)^2] \pi t} t^{s-1} dt \right]$$

$$+ \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 e^{\beta^2 \pi t} \psi_1(\alpha, t)\, t^{s-1} dt.$$

La première ligne donne lieu à la même discussion que

le terme $Y_1(s)$ au n° 28; la seconde, à la même discussion que les sommes correspondantes dans la seconde expression de $Y_2(s)$ au n° 28. Ce sont donc des fonctions entières de s dans tout le plan qui vérifient la condition Θ.

Reste à considérer le terme écrit en troisième ligne. Changeons la variable d'intégration t en $1:t$ et tenons compte de la relation (2) du n° 3 de la seconde partie, qui peut se mettre sous la forme

$$\psi_1\left(\alpha, \frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi t}\cos 2k\pi\alpha\right];$$

ce terme se décomposera en deux autres:

$$\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_1^{\infty} e^{\frac{\beta^2\pi}{t}} t^{-s-\frac{1}{2}}dt$$

$$+\frac{2\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_1^{\infty} e^{\frac{\beta^2\pi}{t}} t^{-s-\frac{1}{2}}dt\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi t}\cos 2k\pi\alpha$$

Le second terme est, à première vue, par le théorème du n° 9, une fonction entière de s qui vérifie la condition Θ; le premier devient, en changeant t en $\frac{1}{t}$,

$$\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t} t^{s-\frac{3}{2}}dt,$$

c'est-à-dire le terme qui figure dans l'énoncé du théorème. Le théorème est donc démontré.

33. *Propriétés analytiques de* $Z_h(s, u, v)$. Ces propriétés résultent immédiatement des théorèmes des n°s 28 et 32. On en conclut que l'on peut poser, pour $\mathcal{R}(s) > \frac{1}{2}$,

$$(9). \quad Z_h(s, u, v) = \theta(s, u, v) + \frac{\pi^s}{2(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t} t^{s-\frac{3}{2}}dt,$$

où $\theta(s, u, v)$ est, comme au n° 32, une fonction entière de s qui vérifie uniformément la condition Θ.

La fonction $Z_h(s, u, v)$ aura une infinité de pôles ; ce sont ceux de la fonction

$$\frac{\pi^s}{2(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t} t^{s-\frac{3}{2}}dt = \frac{\pi^s}{2(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pi\beta^2)^k}{k!}\int_0^1 t^{s+k-\frac{5}{2}}dt$$

$$= \frac{\pi^s}{2(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pi\beta^2)^k}{k!}\frac{1}{s+k-\frac{1}{2}}.$$

Ce développement, valable dans tout le plan s, met les pôles en évidence et fait connaître les résidus correspondants, si l'on se rappelle que (n° 27)

$$\beta^2 = \gamma\left(\frac{v-u}{1-\gamma}\right)^2.$$

La fonction $Z_h(s, u, v)$ possède donc tous les pôles $s = \frac{1}{2} - k$, $k = 0, 1, 2\ldots$, qui sont ceux de la fonction $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, sauf cependant si $u = v$, auquel cas $\beta = 0$ et le pôle $s = \frac{1}{2}$ seul subsiste.

Enfin, en multipliant la formule (9) par $1 : \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, on en conclut, moyennant le théorème du n° 18, où l'on changera s en $s - \frac{1}{2}$, que la fonction

$$\frac{Z_h(s, u, v)}{\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}$$

est une fonction entière dans toute l'étendue du plan, qui vérifie la condition Θ.

CHAPITRE III

Étude des fonctions A (s, u, v), B (s, u, v) et de quatre fonctions auxiliaires

§ 1. *Définition et propriétés des fonctions auxiliaires* $\psi_1(u, v, t)$, $\chi_1(u, v, t)$, $\psi_2(u, v, t)$, $\chi_2(u, v, t)$

34. *Définition et propriétés fonctionnelles de* $\psi_1(u, v, t)$. Soit t une variable réelle, essentiellement positive, ensuite u et v des paramètres réels quelconques ; nous définirons la fonction $\psi_1(u, v, t)$ par la somme illimitée

$$(1). \quad . \quad . \quad \psi_1(u, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+u)^2\pi t} \cos 2\pi (n + u) v,$$

où n reçoit toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

La fonction définie par cette formule (1) renferme, comme cas particulier, la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ de la deuxième partie (n° 3) avec laquelle elle se confond pour $v = 0$. Elle est visiblement, pour toute valeur de v, une fonction paire, continue et périodique de u, dont la période est l'unité.

On peut la développer, pour toutes les valeurs de u, dans la série trigonométrique

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi_1(u, v, t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi u,$$

les coefficients ayant pour expressions

$$a_k = 2\int_0^1 \psi_1(u, v, t) \cos 2k\pi u \, du = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\pi t} \cos(2\pi u v) \cos(2k\pi u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\pi t} \left[\cos 2\pi (v + k) u + \cos 2\pi (v - k) u\right] du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} + e^{-(k-v)^2 \frac{\pi}{t}} \right].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule (2), elle devient

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad \psi_1(u, v, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} \cos 2k\pi u.$$

La comparaison des formules (1) et (3) montre la double réciprocité qui existe entre les paramètres de la fonction ψ_1 : d'abord une réciprocité de t avec lui-même, dont nous avons déjà reconnu l'importance dans la seconde partie du Mémoire à propos de $\psi_1(\alpha, x)$; ensuite une réciprocité correspondante entre les paramètres u et v.

35. *Définition et propriétés fonctionnelles de* χ_1 (u, v, t). Laissons aux variables u, v, t le même sens que dans le numéro précédent; la fonction $\chi_1(u, v, t)$ sera définie par la série doublement illimitée

$$(4). \quad . \quad . \quad \chi_1(u, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+u)^2 \pi t} \sin 2\pi(n+u)v.$$

C'est une fonction impaire de u qui admet l'unité pour période. On peut donc, pour toutes les valeurs de u, la développer dans la série trigonométrique

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \chi_1(u, v, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\pi u,$$

les coefficients ayant pour valeurs

$$b_k = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\pi t} \sin(2\pi uv) \sin(2k\pi u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\pi t} \left[\cos 2\pi(v-k)u - \cos 2\pi(v+k)u\right] du$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} - e^{-(k-v)^2 \frac{\pi}{t}}\right].$$

Substituant ces valeurs dans (5), on trouve

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad \chi_1(u, v, t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} \sin 2k\pi u$$

et cette formule donne lieu aux mêmes remarques que la formule (5).

36. *Définitions de* ψ_2 (u, v, t) *et* χ_2 (u, v, t). Ces fonctions s'obtiennent, à un facteur près ($\pm 2\pi$), en différentiant les fonctions ψ_1 et χ_1 par rapport à v : on pose, par définition,

$$(7). \quad . \quad \begin{cases} \psi_2(u, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+u)\, e^{-(n+u)^2\pi t} \sin 2\pi(n+u)v, \\ \chi_2(u, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+u)\, e^{-(n+u)^2\pi t} \cos 2\pi(n+u)v, \end{cases}$$

et l'on a par conséquent aussi des formules correspondant aux formules (5) et (6)

$$(8). \quad . \quad \begin{cases} \psi_2(u, v, t) = \frac{1}{t\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k+v)\, e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} \cos 2k\pi u, \\ \chi_2(u, v, t) = \frac{1}{t\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k+v)\, e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} \sin 2k\pi u. \end{cases}$$

37. *Expressions particulières des fonctions précédentes.* Nous aurons à considérer ces fonctions dans le cas particulier où u et v varient entre *zéro* et *un* et où t est plus grand que *un*. Moyennant ces restrictions, les formules précédentes pourront se condenser, en désignant en général par $\theta(u, v, t)$ une fonction *continue* et *limitée* de u, v, t, sous les formes suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} \psi_1(u, v, t) = \cos(2\pi uv) e^{-u^2\pi t} + \cos[2\pi(1-u)v] e^{-(1-u)^2\pi t} + \theta(u, v, t) e^{-\pi t}, \\ \psi_1\left(u, v, \frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,[e^{-v^2\pi t} + \cos(2\pi u)\, e^{-(1-v)^2\pi t} + \theta(u, v, t)\, e^{-\pi t}], \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \chi_1(u, v, t) = \sin(2\pi uv)e^{-u^2\pi t} - \sin[2\pi(1-u)v]e^{-(1-u)^2\pi t} + \theta'(u,v,t)e^{-\pi t}, \\ \chi_1\left(u, v, \frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,[\sin(2\pi u)e^{-(1-v)^2\pi t} + \theta(u, v, t)\,e^{-\pi t}], \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \psi_2(u, v, t) = u\sin(2\pi uv)e^{-u^2\pi t} + (1-u)\sin[2\pi(1-u)v]e^{-(1-u)^2\pi t} + \theta(u,v,t)e^{-\pi t}, \\ \psi_2\left(u, v, \frac{1}{t}\right) = t\sqrt{t}\,[ve^{-v^2\pi t} - (1-v)\cos(2\pi u)\,e^{-(1-v)^2\pi t} + \theta'(u, v, t)\,e^{-\pi t}], \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \chi_2(u, v, t) = u\cos(2\pi uv)e^{-u^2\pi t} - (1-u)\cos[2\pi(1-u)v]e^{-(1-u)^2\pi t} + \theta(u,v,t)e^{-\pi t}, \\ \chi_2\left(u, v, \frac{1}{t}\right) = t\sqrt{t}\,[(1-v)\sin(2\pi u)e^{-(1-v)^2\pi t} + \theta(u, v, t)\,e^{-\pi t}]. \end{cases}$$

Les formules (9) correspondent aux formules (1) et (3), les formules (10) à (4) et (6), les formules (11) et (12) à (7) et (8). On les obtient en isolant les termes relatifs à $n = 0$ et $n = -1$ ou bien à $k = 0$ et $k = -1$. Il est à remarquer que $\theta(u, v, t)$ représente une fonction différente dans chacune de ces formules, mais c'est toujours une fonction limitée de u, v, t.

§ 2. *Étude des fonctions* A (s, u, v) *et* B (s, u, v).

38. *Définitions de* $A(s, u, v)$ *et* $B(s, u, v)$. Soient s une variable imaginaire, u et v des paramètres réels. Nous n'imposerons d'abord aucune condition à v, mais nous supposerons que u est compris entre *zéro* et *un* (limites exclues). Cette restriction faite, nous posons, par définition, pour $\Re(s) > 1$,

$$(13)\quad A(s, u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(n+u)v}{(n+u)^s}, \qquad B(s, u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(n+u)v}{(n+u)^s}.$$

Ces séries sont absolument et uniformément convergentes pour $\Re(s) > 1$, mais les fonctions existent pour toutes les valeurs de s, comme nous le montrerons tout à l'heure.

Le cas où v est entier se résout immédiatement et nous

pouvons l'éliminer du paragraphe actuel. En effet, si v est entier, on a

$$A(s,u,v)=\cos 2\pi uv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s}, \qquad B(s,u,v)=\sin 2\pi uv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s},$$

et ces fonctions de s se ramènent à la fonction connue $B(\alpha, s)$ de la deuxième partie du Mémoire (n° 12); elles sont méromorphes et possèdent un pôle unique et simple $s = 1$. Au contraire, si v est fractionnaire, les deux fonctions, ainsi qu'on le montrera bientôt, sont des fonctions synectiques de s dans tout le plan.

39. *Réduction au cas où* $0 < v < 1$. Nous pouvons nous borner maintenant au cas où v n'est pas entier et nous allons montrer qu'on peut même se réduire au cas où v est compris dans l'intervalle (0, 1). A cet effet, posons

$$v = \lambda + \alpha,$$

où α est compris entre *zéro* et *un* et où λ désigne un entier positif ou négatif. On aura, par les formules (13),

$$(14) \quad \begin{cases} A(s, u, v) = \cos 2\lambda\pi u\, A(s, u, \alpha) - \sin 2\lambda\pi u\, B(s, u, \alpha), \\ B(s, u, v) = \sin 2\lambda\pi u\, A(s, u, \alpha) + \cos 2\lambda\pi u\, B(s, u, \alpha), \end{cases}$$

ce qui prouve bien notre assertion, puisque $0 < \alpha < 1$.

40. *Extension de* A (s, u, v) *à tout le plan.* Nous pouvons maintenant supposer que u et v sont tous les deux compris dans l'intervalle (0, 1) et nous allons chercher, dans cette hypothèse, des formules capables de représenter $A(s, u, v)$ dans tout le plan. Par la relation

$$\frac{1}{(n+u)^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-(n+u)^2\pi t} dt,$$

que nous multiplierons par $\cos(n+u)v$, il vient facilement, en

sommant par rapport à n et en tenant compte de la formule (1) au n° 34,

$$(15)\qquad A(s, u, v) + A(s, 1-u, v) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty \psi_1(u, v, t)\, t^{\frac{s}{2}-1} dt.$$

Le second membre converge pour toute valeur de s. Mais cette circonstance n'est pas apparente dans la formule précédente.

Pour la mettre en évidence, décomposons l'intervalle d'intégration en deux parties $(0, 1)$ et $(1, \infty)$ et changeons la variable d'intégration t en $1 : t$ dans le premier de ces deux intervalles. Il viendra

$$(16)\quad A(s,u,v)+A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_1^\infty\left[\psi_1(u,v,t)t^{\frac{s}{2}}+\psi_1\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s}{2}}\right]\frac{dt}{t}.$$

Maintenant la convergence de l'intégrale pour toute valeur de s est une conséquence immédiate des formules (9).

En second lieu, en partant de la relation

$$\frac{1}{(n+u)^{s+1}} = \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{s+1}{2}-1} e^{-(n+u)^2\pi t} dt,$$

que nous multiplierons par $(n+u)\cos(n+u)v$, il viendra, en sommant par rapport à n, eu égard à la formule (7),

$$(17)\quad A(s,u,v)-A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_0^\infty \chi_2(u,v,t)\, t^{\frac{s+1}{2}-1} dt;$$

puis, en opérant comme dans le premier cas,

$$(18)\quad A(s,u,v)-A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_1^\infty\left[\chi_2(u,v,t)t^{\frac{s+1}{2}}+\chi_2\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s+1}{2}}\right]\frac{dt}{t}.$$

Le second membre fournit maintenant, eu égard aux équations (12), une représentation valable dans tout le plan.

En additionnant membre à membre les équations (16) et (18), on aura une représentation de A (s, u, v) valable dans tout le plans s, qui montre (n° 9) que, u et v étant supposés donnés et compris entre *zéro* et *un*, la fonction A (s, u, v) est entière dans tout le plan et vérifie la condition Θ. Nous reviendrons sur ce point tout à l'heure (n° 42).

41. *Extension de* B (s, u, v) *à tout le plan.* Supposons encore u et v compris dans l'intervalle (0, 1) et procédons comme dans le numéro précédent. On trouvera, comme les formules (15) et (16),

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} B(s,u,v)-B(s,1-u,v) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_0^\infty \chi_1(u,v,t)\,t^{\frac{s}{2}-1}\,dt \\ &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_1^\infty \left[\chi_1(u,v,t)t^{\frac{s}{2}}+\chi_1\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s}{2}}\right]\frac{dt}{t}. \end{aligned}\right.$$

Sous cette dernière forme, u et v n'étant pas entiers, la convergence de l'intégrale pour toute valeur de s résulte immédiatement des formules (10).

En second lieu, on trouvera, comme les formules (17) et (18),

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} B(s,u,v)+B(s,1-u,v) &= \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_0^\infty \psi_2(u,v,t)\,t^{\frac{s+1}{2}-1}\,dt \\ &= \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_1^\infty \left[\psi_2(u,v,t)t^{\frac{s+1}{2}}+\psi_2\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s+1}{2}}\right]\frac{dt}{t}, \end{aligned}\right.$$

et ce second membre fournit, eu égard aux équations (11), une définition du premier membre valable dans tout le plan s.

En additionnant maintenant membre à membre les équations (19) et (20), on obtiendra une définition de B (s, u, v) valable dans tout le plan. Elle montre que B (s, u, v) est une fonction entière de s dans tout le plan qui vérifie la condition Θ, mais nous aurons à revenir sur ce point dans un instant (n° 43).

42. *Manière dont* A (s, u, v) *vérifie la condition* Θ. Nous venons de dire que A (s, u, v) vérifie la condition Θ pour des valeurs fractionnaires données de u, v. Mais, comme cette fonction présente un pôle pour v entier (n° 38), il est clair qu'elle ne peut pas vérifier *uniformément* la condition Θ quand v varie dans l'intervalle (0, 1). Il est très important d'étudier les propriétés de la fonction dans le voisinage de ces valeurs limites 0 et 1 où elle cesse d'être entière. Pour faire cette étude, nous nous placerons au point de vue suivant, qui se présentera plus tard (§ 3) :

Nous supposerons que u est une constante donnée, comprise entre *zéro* et *un*, tandis que v seul est variable et peut tendre vers les limites 0 et 1.

Considérons d'abord la formule (16), savoir

$$A(s,u,v)+A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left[\int_1^\infty \psi_1(u,v,t)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}+\int_1^\infty \psi_1\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}\right].$$

La première intégrale, où $\psi_1(u, v, t)$ est donné par la première des formules (9) au n° 37, est, par le théorème du n° 9, une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ. En effet, c'est u seul, lequel est considéré comme donné et compris entre *zéro* et *un*, qui figure dans les exposants.

Il n'en est pas de même dans la seconde intégrale. Celle-ci, par la seconde des formules (9), se met sous la forme

$$\int_1^\infty t^{-\frac{s+1}{2}}e^{-v^2\pi t}dt+\cos 2\pi u\int_1^\infty t^{-\frac{s+1}{2}}e^{-(1-v)^2\pi t}dt+\int_1^\infty \theta(u,v,t)\,t^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi t}dt.$$

Le dernier terme de cette somme est, par le théorème du n° 9, une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle (0, 1) de v. Mais il est visible qu'il n'en est pas de même des deux premiers, dans lesquels l'exponentielle disparaît pour $v = 0$ ou pour $v = 1$. Pour résumer cette discussion dans une formule, désignons par $\theta(s, v)$ une fonction qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle (0, 1) de v; on pourra poser

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &A(s, u, v) + A(s, 1-u, v) = \theta(s, v) \\ &\qquad + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^\infty t^{-\frac{s+1}{2}} dt \left[e^{-v^2\pi t} + \cos 2\pi u\, e^{-(1-v)^2\pi t}\right]. \end{aligned}\right.$$

En se servant des formules (12), on peut faire sur la formule (18) une discussion identique à la précédente et l'on trouve

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &A(s, u, v) - A(s, 1-u, v) = \theta(s, v) \\ &\qquad + (1-v) \sin 2\pi u \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_1^\infty t^{-\frac{s}{2}} e^{-(1-v)^2\pi t} dt, \end{aligned}\right.$$

et $\theta(s, v)$ désigne, en général, une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle (0, 1) de v.

43. *Manière dont* B (s, u, v) *vérifie la condition* Θ. Supposons, comme au numéro précédent, que le paramètre u soit donné entre *zéro* et *un* (limites exclues) et que v seul soit variable entre *zéro* et *un*. La fonction $B(s, u, v)$ ne vérifiera pas *uniformément* la condition Θ dans cet intervalle (0, 1) de v, mais une discussion semblable à celle du numéro précédent permet d'isoler, dans la représentation de cette fonction, les seuls termes auxquels tient cette difficulté.

En substituant les valeurs (10) dans les équations (19), on trouve, par le raisonnement du numéro précédent,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &B(s, u, v) - B(s, 1-u, v) = \theta(s, v) \\ &\qquad + \sin 2\pi u \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-(1-v)^2\pi t} t^{-\frac{s+1}{2}} dt; \end{aligned}\right.$$

de même, en substituant les valeurs (11) dans les formules (20),

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &B(s, u, v) + B(s, 1-u, v) = \theta(s, v) \\ &\qquad + \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_1^\infty t^{-\frac{s}{2}} dt \left[v e^{-v^2\pi t} - (1-v)\cos 2\pi u\, e^{-(1-v)^2\pi t} \right]. \end{aligned}\right.$$

On représente, comme au numéro précédent, par $\theta(s, v)$ une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle $(0, 1)$ de v, mais cette fonction diffère, à part cela, d'une formule à l'autre.

§ 3. *Étude des intégrales*

$$\int_0^1 \frac{A(2s-1, u, kv)\, dv}{(p + 2qv + rv^2)^s}, \quad \int_0^1 \frac{B(2s-1, u, kv)\, dv}{(p + 2qv + rv^2)^s}.$$

44. Dans le paragraphe actuel, nous allons considérer des intégrales formées au moyen des fonctions A et B du paragraphe précédent et d'un trinôme du second degré en v

$$p + 2qv + rv^2,$$

assujetti aux conditions du n° 20 : 1° les coefficients p, q, r sont réels et $p > 0$; 2° le discriminant $\delta = q^2 - pr$ est positif; 3° le trinôme ne s'annule pas dans l'intervalle $(0, 1)$ de v.

45. Théorème. *La fonction définie, pour toute valeur de* s, *par la formule*

$$\mathcal{A}_1(s) = \int_0^1 \frac{A(2s-1, u, v) + A(2s-1, 1-u, v)}{(p + 2qv + rv^2)^s}\, dv,$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Remplaçons, sous le signe d'intégration, le numérateur par sa valeur (21) où l'on changera s en $2s-1$; $\mathcal{A}_1(s)$ deviendra

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\theta(s,v)\,dv}{(p+2qv+rv^2)^s} + \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 dv\int_1^\infty \frac{e^{-v^2\pi t}t^{-s}dt}{(p+2qv+rv^2)^s} \\ &\qquad + \cos 2\pi u\,\frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 dv\int_1^\infty \frac{e^{-(1-v)^2\pi t}t^{-s}dt}{(p+2qv+rv^2)^s}. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme vérifie la condition Θ par le théorème du n° 7; le second par celui du n° 22; le troisième, moyennant le changement de la variable d'intégration v en $(1-v)$, prend la même forme que le second et vérifie la condition Θ pour la même raison (*).

Remarque. Si les coefficients p, q et r sont variables entre des limites finies sans cesser de vérifier les conditions du numéro précédent, la fonction $\mathcal{A}_1(s)$ vérifiera *uniformément* la condition Θ, pourvu que le trinôme $(p+2qv+rv^2)$ ne puisse pas tendre vers zéro, p, q, r variant dans les conditions indiquées et v dans l'intervalle $(0, 1)$.

Cette conclusion découle immédiatement de la remarque qui termine le n° 22.

(*) On remarquera que la démonstration précédente repose sur la présence du dénominateur $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$, devant le signe d'intégration, dans la formule (25). Si l'on remplaçait dans $\mathcal{A}_1(s)$ la somme $A(2s-1, u, v)+A(2s-1, 1-u, v)$ par la différence de ces deux termes, l'emploi de la formule (22) fournirait une formule analogue à (25), mais le dénominateur $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ serait remplacé par $\Gamma(s)$, le théorème du n° 22 ne s'appliquerait plus et la nouvelle fonction ainsi formée aurait une infinité de pôles. Il résulte aussi de là que le quotient de cette nouvelle fonction par $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ vérifierait la condition Θ.

46. Théorème. *La fonction définie, pour toute valeur de s, par la formule*

$$\mathfrak{B}_1(s) = \int_0^1 \frac{B(2s-1, u, v) - B(2s-1, 1-u, v)}{(p+2qv+rv^2)^s}\, dv$$

est une fonction entière de s *qui vérifie la condition* Θ (*).

Démonstration. Remplaçons, sous le signe d'intégration, le numérateur $B(2s-1, u, v) - B(2s-1, 1-u, v)$ par sa valeur, déduite de la formule (23) où l'on changera s en $2s-1$.

La fonction $\mathfrak{B}_1(s)$ se met sous la forme

$$(26)\qquad \int_0^1 \frac{\theta(s, v)\, dv}{(p+2qv+rv^2)^s} + \sin 2\pi u \, \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 dv \int_1^\infty \frac{t^{-s} e^{-(1-v)^2\pi t} dt}{(p+2qv+rv^2)^s}.$$

Ces deux termes vérifient la condition Θ, comme on l'a montré dans la démonstration du théorème précédent.

Remarque. Si les coefficients p, q et r sont variables, comme dans la remarque qui termine le numéro précédent, $\mathfrak{B}_1(s)$ vérifiera aussi uniformément la condition Θ.

47. Théorème. *Les dérivées partielles par rapport aux paramètres* p, q, r *des fonctions* $\mathfrak{A}_1$ (s) *et* $\mathfrak{B}_1$ (s) *des deux théorèmes précédents, sont encore des fonctions entières de* s *qui vérifient la condition* Θ.

Démonstration. Considérons, par exemple, l'expression (25) de $\mathfrak{A}_1(s)$ au n° 45. C'est une somme de trois termes, qui satis-

(*) Si l'on remplaçait dans l'expression de $\mathfrak{B}_1(s)$ la différence $B(2s-1, u, v) - B(2s-1, 1-u, v)$ par une somme, le théorème ne s'appliquerait plus et la fonction aurait une infinité de pôles (voir la note précédente). Mais le quotient de cette fonction par $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ vérifierait de nouveau la condition Θ.

font séparément à l'énoncé du théorème : on le voit directement pour le premier; pour les deux autres, on le conclut de la remarque II qui complète le théorème du n° 22.

Remarque. Si les coefficients p, q, r sont variables comme dans la remarque du n° 45, les dérivées partielles dont il est question dans le théorème vérifieront aussi uniformément la condition Θ. C'est encore une conséquence de la remarque du n° 22 à laquelle nous venons de renvoyer.

48. Théorème. *Soient γ un nombre positif donné > 0 et < 1, et* k *un entier positif variable qui peut croître indéfiniment; la fonction définie par la formule*

$$\mathcal{A}_k(s) = \int_0^1 \frac{A(2s-1, u, kv) + A(2s-1, 1-u, kv)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable.*

Démonstration. Soit λ le plus grand entier contenu dans kv; posons, comme au n° 39,

$$kv = \lambda + \alpha,$$

il viendra, par la formule (14) de ce numéro,

$$\mathcal{A}_k(s) = \int_0^1 \cos 2\lambda\pi u \frac{A(2s-1, u, \alpha) + A(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv$$
$$- \int_0^1 \sin 2\lambda\pi u \frac{B(2s-1, u, \alpha) - B(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv,$$

ou, par décomposition de l'intervalle (0,1) d'intégration,

$$\mathcal{A}_k(s) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \cos 2\lambda\pi u \int_{\frac{\lambda}{k}}^{\frac{\lambda+1}{k}} \frac{A(2s-1, u, \alpha) + A(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv$$
$$- \sum_{\lambda=0}^{k-1} \sin 2\lambda\pi u \int_{\frac{\lambda}{k}}^{\frac{\lambda+1}{k}} \frac{B(2s-1, u, \alpha) - B(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv,$$

Prenons, dans chaque intervalle partiel $\left(\frac{\lambda}{k}, \frac{\lambda+1}{k}\right)$, α comme variable d'intégration au lieu de v. Il viendra

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_k(s) = \frac{1}{k}\sum_{\lambda=0}^{k-1} \cos 2\lambda\pi u \int_0^1 \frac{A(2s-1,u,\alpha)+A(2s-1,1-u,\alpha)}{\left[1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2\right]^s}\,d\alpha \\ -\frac{1}{k}\sum_{\lambda=0}^{k-1} \sin 2\lambda\pi u \int_0^1 \frac{B(2s-1,u,\alpha)-B(2s-1,1-u,\alpha)}{\left[1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2\right]^s}\,d\alpha, \end{aligned}\right.$$

Si l'on considère le trinôme du second degré en α

$$1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2 = \left(1-\gamma\frac{\lambda^2}{k^2}\right) - 2\left(\frac{\gamma\lambda}{k^2}\right)\alpha - \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)\alpha^2$$
$$= p + 2q\alpha + r\alpha^2,$$

dont les coefficients p, q, r varient avec λ et k, on reconnaît bien facilement que l'on se trouve dans les conditions où s'appliquent les remarques des n°s 45 et 46. Donc chacune des $2k$ intégrales qui figurent dans la dernière expression de $\mathcal{A}_k(s)$ vérifie *uniformément* la condition Θ, k et λ étant considérés comme variables et $\mathcal{A}_k(s)$, *qui est égal au quotient par* k de la somme de ces $2k$ intégrales, vérifie aussi *uniformément* la condition Θ, k étant considéré comme variable.

49. Théorème. *Les lettres γ et* k *ayant le même sens que dans le théorème précédent, la fonction*

$$\mathcal{B}_k(s) = \int_0^1 \frac{B(2s-1,u,kv)-B(2s-1,1-u,kv)}{(1-\gamma v^2)^s}\,dv$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ; k *étant considéré comme variable.*

Démonstration. Ce théorème se démontre comme le précédent. On désigne par λ le plus grand entier contenu dans kv, et

en posant $kv = \lambda + \alpha$, on trouve, par la formule (14) du n° 39,

$$\mathcal{B}_k(s) = \int_0^1 \sin 2\lambda\pi u \frac{A(2s-1, u, \alpha) + A(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)_s} dv$$
$$+ \int_0^1 \cos 2\lambda\pi u \frac{B(2s-1, u, \alpha) - B(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s} dv$$

et l'on poursuit comme dans le cas précédent.

50. Théorème. *Les dérivées partielles par rapport au paramètre γ des fonctions des deux théorèmes précédents :*

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\mathcal{A}_k(s), \quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\mathcal{B}_k(s),$$

sont encore des fonctions entières de s *dans tout le plan qui vérifient uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable.*

Démonstration. Revenons, par exemple, à l'expression de $\mathcal{A}_k(s)$ par la formule (27) au n° 48. La dérivée par rapport à γ de chaque intégrale qui y figure, telle que

$$\int_0^1 \frac{A(2s-1, u, \alpha) + A(2s-1, 1-u, \alpha)}{\left[1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2\right]^s} d\alpha$$

est encore une fonction qui vérifie uniformément la condition Θ. Cela résulte du théorème du n° 47, car si l'on pose

$$1 - \gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2 = p + 2q\alpha + r\alpha^2,$$

les dérivées partielles par rapport à γ se ramènent à une somme de dérivées partielles par rapport à p, q, r, multipliées respectivement par des facteurs < 1. La démonstration du n° 48 s'applique donc encore au théorème actuel.

§ 4. *Modifications des résultats précédents dans le cas où* $u = 0$

51. Dans les deux paragraphes précédents il a été stipulé que u était compris entre *zéro* et *un*, limites exclues. Les théorèmes que nous avons établis cessent d'être vrais pour $u = 0$. Mais ils peuvent dans ce cas être remplacés par d'autres plus simples que nous aurons aussi à utiliser. Nous allons indiquer comment l'analyse précédente doit être modifiée dans ce cas.

Dans le § 1 de ce chapitre, nous avons dû introduire quatre fonctions auxiliaires. Une seule nous suffira pour le but que nous poursuivons dans celui-ci. Si l'on pose $u = 0$ dans les formules (1) et (3) du n° 4, on trouve

$$(28) \qquad \psi_1(o, v, t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\cos 2n\pi v = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+v)^2\pi t},$$

résultat qui coïncide avec ceux qui ont été établis dans la deuxième partie du Mémoire n° 3.

52. La fonction $A(s, u, v)$ du § 2 devient illusoire pour $u = 0$, un de ses termes devenant infini. Nous lui substituerons, dans le cas actuel, la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{n^s},$$

qui est une fonction périodique du paramètre v.

La série précédente n'est absolument convergente que pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, mais on trouve, en raisonnant comme au n° 40, une expression valable dans tout le plan.

On a d'abord

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1}\, dt \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\cos 2n\pi v.$$

Partageons l'intervalle d'intégration en deux parties (0, 1) et $(1, \infty)$; puis, dans le premier de ces intervalles, substituons à la somme qui est sous le signe d'intégration son expression donnée par la formule (28) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t} \cos 2n\pi v = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+v)^2 \frac{\pi}{t}},$$

et changeons, dans ce même intervalle, la variable d'intégration t en $1 : t$; il viendra, en observant que $s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = 2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{n^s} = -\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} dt \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t} \cos 2n\pi v$$

$$+ \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} t^{-\frac{s+1}{2}} dt \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+v)^2\pi t}.$$

Cette expression montre (n° 9) que la fonction est entière et vérifie la condition Θ lorsque v n'est pas entier. Supposons que v varie dans l'intervalle (0, 1), la fonction ne vérifiera pas *uniformément* la condition Θ, mais nous pouvons reproduire une discussion identique à celle du n° 42 et isoler les deux seuls termes auxquels tient cette difficulté. Ces termes correspondent aux valeurs $n = 0$ et $n = -1$ dans la dernière intégrale. On peut donc poser ici la formule suivante, qui remplacera la formule (21) du n° 42 :

$$(29) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{n^s} = \theta(s, v) + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} t^{-\frac{s+1}{2}} dt \left[e^{-v^2\pi t} + e^{-(1-v)^2\pi t}\right]$$

et $\theta(s, v)$ désigne, dans cette formule, une fonction entière de s dans tout le plan, qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle (0, 1) de v.

Nous pouvons passer maintenant aux théorèmes qui remplaceront ceux du § 3.

53. Théorème. *Soit* $(p + 2qv + rv^2)$ *un trinôme du second degré en* v, *assujetti aux conditions du* n° 44, *la fonction définie pour* $\Re(s) > 1$ *par la formule*

$$\int_0^1 \frac{dv}{(p + 2qv + rv^2)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{n^{2s-1}}$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ. *Les dérivées partielles de la fonction par rapport aux paramètres* p, q *et* r *jouissent de la même propriété* (*).

Démonstration. On remplace la somme sous le signe d'intégration par sa valeur (29) au numéro précédent et l'on retombe sur les démonstrations des n°s 45 et 47.

Remarque. On voit, comme dans la remarque du n° 45, que si les paramètres p, q, r varient entre des limites finies sans cesser de satisfaire aux conditions du n° 44, la fonction du théorème vérifiera *uniformément* la condition Θ. La même conclusion s'applique aux dérivées partielles par rapport à p, q et r.

54. Théorème. *Soit* γ *un nombre donné* > 0 *et* < 1 *et* k *un entier variable qui peut croître indéfiniment, la fonction définie, pour* $\Re(s) > 1$, *par la formule*

$$\int_0^1 \frac{dv}{(1 - \gamma v^2)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2kn\pi v}{n^{2s-1}}$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable.*

(*) Si l'on remplaçait les cosinus par des sinus dans la fonction du théorème, elle cesserait d'être entière, mais, en la divisant par $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, elle vérifierait de nouveau la condition Θ (voir la note au n° 45).

Démonstration. Ce théorème remplace celui du n° 48 et se démontre de la même manière. Soit λ le plus grand entier contenu dans kv, on pose $kv = \lambda + \alpha$ et l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2kn\pi v}{n^{2s-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2kn\pi\alpha}{n^{2s-1}}.$$

Si l'on prend α comme variable d'intégration, la fonction du théorème se met sous la forme

$$\frac{1}{k} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\left[1 - \gamma\left(\frac{\lambda + \alpha}{k}\right)^2\right]^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi\alpha}{n^{2s-1}}.$$

En raisonnant sur cette formule comme sur la formule (27) du n° 48, on voit que le théorème actuel est une simple conséquence du précédent et de la remarque qui l'accompagne.

55. Théorème. *La dérivée partielle par rapport à γ de la fonction précédente, c'est-à-dire la fonctian définie, pour $\Re(s) > 1$, par la formule*

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} \int_0^1 \frac{dv}{(1 - \gamma v^2)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2kn\pi v}{n^{2s-1}}$$

est aussi une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable.*

Démonstration. Ce théorème remplace celui du n° 50 et se démontre de la même manière moyennant la substitution du théorème précédent à celui du n° 48.

CHAPITRE IV

Étude de la fonction $\mathcal{G}(s, u, v)$ (*)

§ 1. *Définition et développement en série de* $\mathcal{G}(s, u, v)$

56. *Définition de* $\mathcal{G}(s, u, v)$. Cette fonction est, comme $Z(s, u, v)$, une fonction de la variable imaginaire s et de trois paramètres réels, u, v et γ, que nous supposerons tous compris entre 0 et 1 (limites exclues).

Elle est définie, pour $\mathcal{R}(s) > 1$, par une somme double :

$$(1). \quad . \quad . \quad \mathcal{G}(s, u, v) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=0}^{E(x+u-v)} \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma(y+v)^2]^s},$$

où l'on attribue à x toutes les valeurs entières de 1 à ∞ et où l'on donne à y, pour chaque valeur de x, toutes les valeurs entières $\geqq 0$ et $< (x + u - v)$. On remarquera que la plus grande valeur de y est x si $u > v$ et $x - 1$ si $u < v$. Nous excluons de notre analyse le cas où $u = v$, qui exigerait des considérations spéciales.

57. *Réduction de* $\mathcal{G}(s, u, v)$ *à* $\mathcal{G}_h(s, u, v)$. Nous désignerons par $\mathcal{G}_h(s, u, v)$, h étant un entier positif, la fonction qui s'obtient en supprimant dans la fonction $\mathcal{G}(s, u, v)$ tous les termes, en nombre limité, dans lesquels x est $< h$. On a ainsi

$$(2). \quad . \quad . \quad \mathcal{G}_h(s, u, v) = \sum_{x=h}^{\infty} \sum_{y=0}^{E(x+u-v)} \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma(y+v)^2]^s}.$$

(*) Il est à remarquer que cette fonction joue un rôle intermédiaire dans notre analyse, aussi notre but n'était nullement d'en faire ici une étude complète. Nous nous bornons strictement à démontrer les résultats qui doivent nous servir au chapitre VI. Quelques autres résultats seront indiqués en note et sans démonstration, à titre d'éclaircissement, lorsque nous le jugerons utile.

Les deux fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_h$ ne diffèrent l'une de l'autre que par la suppression d'un nombre limité d'exponentielles qui sont toutes des fonctions synectiques de s dans tout le plan et qui vérifient la condition Θ. Donc, au point de vue des singularités ou de la condition Θ, l'étude de $\mathcal{G}$ se ramène entièrement à celle de $\mathcal{G}_h$.

Dans la suite, nous supposerons que l'on ait choisi h assez grand pour que l'on ait (comme au n° 26)

$$h > \sqrt{\gamma}\,(h+1).$$

Dans cette hypothèse, la quantité $(x+u)^2 - \gamma(y+v)^2$ sera essentiellement positive et non nulle dans tous les termes de $\mathcal{G}_h$, alors même que u et v varient dans l'intervalle (0,1), et cette condition est nécessaire pour que les développements trigonométriques que nous allons effectuer ne donnent lieu à aucune critique.

58. *Développement de* $\mathcal{G}_h$ (s, u, v) *en série trigonométrique.* Nous désignerons désormais par u une quantité supérieure à v, de sorte que la limite supérieure de y dans la somme du second membre de l'équation (2) sera x. On peut développer la fonction $\mathcal{G}_h(s, u, v)$ en série trigonométrique par rapport à v dans l'intervalle (0,1). Ce développement sera de la forme

$$(3). \quad . \quad . \; \mathcal{G}_h(s, u, v) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi v + b_k \sin 2k\pi v).$$

Le coefficient a_0 aura pour valeur

$$a_0 = 2\int_0^1 \mathcal{G}_h(s, u, v)\, dv = 2 \sum_{x=h}^{\infty} \sum_{y=0}^{x} \int_0^1 \frac{dv}{[(x+u)^2 - \gamma(y+v)^2]^s}.$$

Dans le second membre de cette équation, la somme par rapport à y se transforme immédiatement en une seule intégrale aux limites 0 et $(x+1)$. La même transformation s'applique

aux coefficients a_k et b_k, de telle sorte que ces coefficients se présentent d'abord sous la forme :

$$(k). \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^{x+1} \frac{dv}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^s}, \\ a_k &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^{x+1} \frac{\cos 2k\pi v \, dv}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^s}, \\ b_k &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^{x+1} \frac{\sin 2k\pi v \, dv}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^s}. \end{aligned} \right.$$

59. *Développement de* $\mathfrak{G}_h(s, 1-u, 1-v)$ *en série trigonométrique.* Continuons à désigner par u et v les deux paramètres considérés au numéro précédent ($u > v$) et représentons par u' et v' leurs compléments

$$u' = 1 - u, \quad v' = 1 - v.$$

On aura, à l'inverse de ce qui avait lieu pour u et v,

$$u' < v';$$

de sorte que, si l'on accentue u et v dans la formule (2), la limite supérieure de la somme par rapport à y sera $x - 1$ au second membre de cette formule.

Posons donc le nouveau développement trigonométrique :

$$(5). \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_h(s, u', v') &= \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos 2k\pi v' + b'_k \sin 2k\pi v') \\ &= \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos 2k\pi v - b'_k \sin 2k\pi v), \end{aligned} \right.$$

valable aussi dans l'intervalle (0, 1) de v. Les nouveaux coefficients auront pour valeurs :

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} a'_0 &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^x \frac{dv}{[(x+u')^2 - \gamma v^2]^s}, \\ a'_k &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos 2k\pi v \, dv}{[(x+u')^2 - \gamma v^2]^s}, \\ b'_k &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin 2k\pi v \, dv}{[(x+u')^2 - \gamma v^2]^s}. \end{aligned} \right.$$

§ 2. *Étude de la fonction* $a_0 + a'_0$

60. *Transformation de* $a_0 + a'_0$. En décomposant l'intervalle d'intégration en deux parties, on tire des formules (4) et (6)

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^{x+u} + \int_{x+u}^{x+1} \frac{dv}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^s}, \\ a'_0 &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^{x+u'} - \int_x^{x+u'} \frac{dv}{[(x+u')^2 - \gamma v^2]^s}. \end{aligned} \right.$$

Changeons la variable d'intégration v :

En $(x+u)v$	dans l'intégrale aux limites		$(0, x+u)$,
» $(x+u')v$	»	»	$(0, x+u')$,
» $(x+u+v)$	»	»	$(x+u, x+1)$,
» $(x+u'-v)$	»	»	$(x, x+u')$.

Il viendra

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \frac{1}{(x+u)^{2s-1}} \int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} + 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^{1-u} \frac{dv}{[(x+u)^2 - \gamma(x+u+v)^2]^s}, \\ a'_0 &= 2 \sum_{x=h}^{\infty} \frac{1}{(x+u')^{2s-1}} \int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} - 2 \sum_{x=h}^{\infty} \int_0^{u'} \frac{dv}{[(x+u')^2 - \gamma(x+u'-v)^2]^s}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(8). \quad . \quad . \quad \zeta_{1,h}(u, s) = \sum_{x=h}^{\infty} \frac{1}{(x+u)^s} + \sum_{x=h+1}^{\infty} \frac{1}{(x-u)^s}.$$

Cette fonction est une fonction connue; elle ne diffère de la fonction $\zeta_1(\alpha, s)$, définie par la formule (5) au n° 6 de la deuxième partie du Mémoire, que par la suppression des h premiers termes dans chacune des deux sommes. C'est donc une fonction méromorphe; elle n'a qu'un seul pôle $s = 1$, qui est simple et dont le résidu est 2 (n° 7 de la deuxième partie). La formule (7) au n° 7 de la deuxième partie du Mémoire montre, par l'application du théorème du n° 9, que $\zeta_1(\alpha, s)$ peut se mettre sous la forme

$$\zeta_1(\alpha, s) = \frac{2}{s-1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ est une fonction entière qui vérifie la condition Θ (α étant donné entre *zéro* et *un*). Donc $\zeta_{1h}(u, s)$ peut aussi se mettre sous la même forme et le produit $(s-1)\,\zeta_{1h}(u, s)$ est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition Θ.

Additionnons les formules (7) membre à membre, en remplaçant u' par $(1-u)$ et en nous reportant à la définition de $Z_h(s, u, v)$ donnée au n° 26; il viendra

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} a_0 + a'_0 = {} & 2\zeta_{1h}(u, 2s-1)\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \\ & + 2\int_0^{1-u} [Z_h(s, u, u+v) - Z_h(s, 1-u, 1-u-v)]\,dv. \end{aligned}\right.$$

Cette formule conduit au théorème suivant :

61. Théorème. *La fonction* $a_0 + a'_0$ *est une fonction méromorphe de* s *qui n'a qu'un seul pôle* $s = 1$ *et elle peut se mettre sous la forme*

$$\frac{1}{s-1}\,\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s),$$

où θ (s) *désigne une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Le terme écrit sur la seconde ligne dans le

second membre de l'équation (9) est de la forme $\theta(s)$, en vertu des théorèmes des n°s 28 et 7. Il reste donc à démontrer que celui qui est sur la première ligne est de la forme indiquée dans le théorème :

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}+\theta(s).$$

En vertu des remarques faites au numéro précédent, on peut poser

$$\zeta_{1h}(u, 2s-1)=\frac{1}{s-1}+\theta(s).$$

D'autre part, en développant suivant les puissances de $(s-1)$, on a

$$\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}=\theta(s-1)=\int_0^1 \frac{dv}{1-\gamma v^2}+(s-1)\,\theta(s).$$

On trouve, en multipliant ces deux équations membre à membre

$$\zeta_{1h}(u, 2s-1)\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}=\frac{1}{s-1}\int_0^1 \frac{dv}{1-\gamma v^2}+\theta(s).$$

Multiplions encore par 2 et effectuons l'intégration au second membre; nous retomberons sur l'expression qu'il s'agissait d'obtenir.

62. *Remarque sur les pôles de* a_0 *et* a'_0. Les fonctions a_0 et a'_0 ont toutes les deux une infinité de pôles, mais ces pôles se détruisent en faisant la somme. Pour l'établir, il suffit de considérer la fonction $a_0 - a'_0$. Si l'on définit $\zeta_{2,h}$ par rapport à ζ_2 (2e partie, n° 9) comme nous venons de définir $\zeta_{1,h}$ par rapport à ζ_1, on aura, en soustrayant les équations (7),

$$a_0-a'_0=2\zeta_{2,h}(u, 2s-1)\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}$$
$$+2\int^{1-u}[Z_h(s,u,u+v)+Z_h(s,1-u,1-u-v)]\,dv,$$

si l'on remarque que $\zeta_{2,h}$ est une fonction entière qui vérifie la condition Θ (2e partie, n° 10) et si l'on se reporte au théorème du n° 32, où l'on doit faire actuellement

$$\beta^2 = \frac{\gamma v^2}{(1-\gamma)^2},$$

on trouve que le second membre de la dernière équation peut se mettre sous la forme

$$a_0 - a'_0 = \theta(s) + \frac{2\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^{1-u} dv \int_0^1 e^{-\frac{\gamma v^2}{(1-\gamma)^2}\pi t} t^{s-\frac{3}{2}} dt.$$

Au second membre, le premier terme vérifie la condition Θ ; le second possède tous les pôles $s = \frac{1}{2} - k$ où $k = 0, 1, 2 \ldots$; les résidus correspondants se calculent sans aucune peine sous forme finie. Mais, si l'on fait le quotient de $(a_0 - a'_0)$ par $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, on trouve une fonction entière qui vérifie la condition Θ. Nous n'insisterons pas sur ces calculs qui ne doivent pas nous servir. On pourrait faire dans les paragraphes suivants des remarques analogues aux précédentes au sujet des expressions $(a_k - a'_k)$ et $(b_k + b'_k)$, dont il ne sera pas question, mais qui sont voisines de celles que nous allons y étudier.

§ 3. *Étude de la fonction* $a_k + a'_k$

63. *Transformation de* $a_k + a'_k$. Faisons sur les équations (4) et (6) donnant a_k et a'_k les mêmes décompositions, puis les mêmes substitutions qu'au n° 60; il viendra

$$(10). \quad \left\{ \begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi (x+u) v}{(x+u)^{2s-1}} \\ &\quad + 2\int_0^{1-u} dv \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi (u+v)}{[(x+u)^2 - \gamma (x+u+v)^2]^s}, \\ a'_k &= 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi (x+u') v}{(x+u')^{2s-1}} \\ &\quad - 2\int_0^{u'} dv \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi (u+v)}{[(x+u')^2 - \gamma (x+u'-v)^2]^s}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$A_h(2s-1, u, kv) = \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi(x+u)v}{(x+u)^{2s-1}}.$$

Cette fonction est connue; elle ne diffère de la fonction $A(2s-1, u, kv)$ du chapitre III que par la suppression d'un nombre limité de termes, qui sont des fonctions entières de s dans tout le plan et qui vérifient la condition Θ.

Les formules (10) donnent alors

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} a_k + a'_k = 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}[A_h(2s-1, u, kv) + A_h(2s-1, 1-u, kv)] \\ + 2\int_0^{1-u} \cos 2k\pi(u+v)[Z_h(s, u, u+v) - Z_h(s, 1-u, 1-u-v)]dv. \end{aligned}\right.$$

On déduit de là le théorème suivant :

64. Théorème. *La fonction* $(a_k + a'_k)$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable de* 1 *à* ∞.

Démonstration. Considérons le second membre de la formule (11). Le terme écrit sur la première ligne vérifie *uniformément* la condition Θ, car il ne diffère de la fonction $\mathcal{A}_k(s)$ qui fait l'objet du théorème du n° 48 que par un nombre limité d'expressions du type

$$\frac{1}{(x+u)^{2s-1}}\int_0^1 \frac{\cos 2k\pi(x+u)v}{(1-\gamma v^2)^s}\,dv,$$

qui vérifient *uniformément* la condition Θ (k n'entrant que dans un cosinus indépendant de s).

Le terme écrit sur la seconde ligne est, en vertu des théorèmes des n°s 27 et 8, comme précédemment, une fonction qui vérifie *uniformément* la condition Θ. Le théorème est donc établi.

65. Théorème. *La dérivée partielle de la fonction* $(a_k + a'_k)$ *par rapport au paramètre* γ *dont elle dépend, est aussi une fonction qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand l'entier* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. La dérivée $\frac{\partial}{\partial\gamma}(a_k + a'_k)$ est la somme de deux fonctions

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}[A_h(2s-1, u, kv) + A_h(2s-1, 1-u, kv)]$$

$$+\int_0^{1-u} \cos 2k\pi(u+v)\frac{\partial}{\partial\gamma}[Z_h(s, u, u+v) - Z_h(s, 1-u, 1-u-v)]dv,$$

qui vérifient toutes les deux le théorème actuel, la première par le théorème du n° 50, la seconde par celui du n° 31.

66. Le théorème du n° 64 ne nous suffit pas pour la suite, parce que nous aurons à démontrer qu'une série composée d'un nombre illimité de termes, $\Sigma(a_k + a'_k)$, vérifie aussi la condition Θ. Nous arriverons à notre but en nous appuyant sur le théorème qui précède et en procédant par intégrations par parties.

Revenons aux formules (4) où l'on a

$$(12). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a_k = 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x+1} \frac{\cos 2k\pi v\, dv}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^s}.$$

Transformons chaque terme de cette somme par deux intégrations par parties consécutives portant sur la ligne trigonométrique. Si l'on a soin de remarquer que kx est un entier, on obtiendra

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^{x+1} \frac{\cos 2k\pi v\, dv}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^s} &= \frac{2\gamma s}{(2k\pi)^2}\frac{x+1}{[(x+u)^2 - \gamma(x+1)^2]^{s+1}} \\ &- \frac{2\gamma s}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1} \frac{\cos 2k\pi v\, dv}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^{s+1}} \\ &- \frac{4\gamma^2 s(s+1)}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1} \frac{\cos 2k\pi v}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^{s+2}} v^2 dv. \end{aligned}\right.$$

Les termes du second membre peuvent s'écrire

$$(14). \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(2k\pi)^2}\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{[(x+u)^2-\gamma(x+v)^2]^s}\right]_{v=1} \\ & -\frac{2\gamma s}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+1}} \\ & -\frac{4\gamma^2 s}{(2k\pi)^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+1}}. \end{aligned} \right.$$

Substituons cette valeur des intégrales dans l'expression (12) de a_k; le résultat pourra s'écrire, en précisant par la notation $a_k(s)$ la valeur de l'argument s qui entre dans cette fonction,

$$(15). \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} a_k(s) = & \frac{1}{2(k\pi)^2}\left[\frac{\partial}{\partial v}Z_h(s, u, v)\right]_{v=1} \\ & -\frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1+2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)a_k(s+1). \end{aligned} \right.$$

La même transformation s'applique à a'_k. On n'a pas de nouveau calcul à faire, si l'on remarque que l'on passe de a_k à a'_k en changeant x en $x-1$ et u en $2-u$ dans la formule (12). Il suffit donc de faire cette même substitution dans (13) et dans (14), où il n'y a pas de dérivation à faire par rapport à u ou à x. Mais le terme tout intégré dans (14) peut alors s'écrire autrement, car

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{[(x+1-u)^2-\gamma(x-1+v)^2]^s}\right]_{v=1}$$
$$= -\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{[(x+1-u)^2-\gamma(x+1-v)^2]^s}\right]_{v=1},$$

et par conséquent la formule (15) sera remplacée par

$$(16). \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} a'_k(s) = & -\frac{1}{2(k\pi)^2}\left[\frac{\partial}{\partial v}Z_h(s, 1-u, 1-v)\right]_{v=1} \\ & -\frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1+2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)a'_k(s+1). \end{aligned} \right.$$

On conclut de là le théorème suivant :

67. Théorème. *La fonction* $a_k + a'_k$ *peut se mettre sous la forme*

$$a_k + a'_k = \frac{\theta(s, k)}{k^2},$$

où $\theta(s, k)$ *vérifie uniformément la condition* Θ *quand l'entier* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. On voit, par les formules (15) et (16), que la fonction $\theta(s, k)$ est représentée, à un facteur numérique près qui est $1 : 2\pi^2$, par la formule

$$\frac{\partial}{\partial v}[Z_h(s, u, v) - Z_h(s, 1-u, 1-v)]_{v=1}$$
$$-2\gamma s\left(1 + 2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)[a_k(s+1) + a'_k(s+1)].$$

Le terme de la première ligne ne contient pas k et vérifie la condition Θ par le théorème du n° 31; celui de la seconde ligne vérifie *uniformément* la condition Θ par les théorèmes des n°s 64 et 65, en y joignant celui du n° 6.

§ 4. *Étude de la fonction* $b_k - b'_k$

68. *Transformation de* $b_k - b'_k$. L'analyse du paragraphe actuel présente la plus grande analogie avec celle du paragraphe précédent. On fait, sur les équations (4) et (6) donnant b_k et b'_k aux n°s 58 et 59, les mêmes décompositions et les mêmes substitutions qu'au n° 60, et l'on trouve, en soustrayant les résultats,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} b_k - b'_k = 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}[B_h(2s-1, u, kv) - B_h(2s-1, 1-u, kv] \\ +2\int_0^{1-u} \sin 2k\pi(u+v)[Z_h(s, u, u+v) - Z_h(s, 1-u, 1-u-v)]dv. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, la fonction B_h est définie par rapport à B comme A_h par rapport à A ; en d'autres termes, elle ne diffère de la fonction B définie par la formule 13 du n° 38 que par la suppression des termes, en nombre limité, dans lesquels n est $< h$.

69. Théorème. *La fonction* $b_k - b'_k$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand l'entier* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. La démonstration est la même que celle du n° 64. Le terme écrit sur la première ligne dans la formule (17) vérifie uniformément la condition Θ par le théorème du n° 49; celui de la seconde ligne, par les théorèmes du n° 27 et du n° 7.

70. Théorème. *La dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial\gamma}(b_k - b'_k)$ *est aussi une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞ (même démonstration qu'au n° 65).

71. Nous avons à reproduire ici une transformation analogue à celle du n° 66. Revenons à la troisième des formules (4) au n° 57, qui est

$$(18). \quad . \quad . \quad . \quad b_k = 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^s}$$

et faisons subir à chaque terme deux intégrations par parties consécutives portant sur la ligne trigonométrique. On a ainsi

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v)]^s} &= -\frac{1}{2k\pi}\left[\frac{1}{[(x+u)^2-\gamma(x+1)^2]^s}-\frac{1}{(x+u)^{2s}}\right]\\ &\quad -\frac{2\gamma s}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+1}}\\ &\quad -\frac{4\gamma^2 s(s+1)}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+2}}\,v^2dv.\end{aligned}\right.$$

Le second membre peut aussi se mettre sous la forme

$$(20). \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2k\pi}\left[\frac{1}{(x+u)^{2s}} - \frac{1}{[(x+u)^2-\gamma(x+1)^2]^s}\right] \\ & -\frac{\gamma s}{2(k\pi)^2}\left(1+2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+1}}. \end{aligned} \right.$$

En substituant cette valeur (20) des intégrales dans la formule (18), on trouve

$$(21). \quad \left\{ \begin{aligned} b_k(s) = & \frac{1}{k\pi}\left[\sum_{x=h}^{\infty}\frac{1}{(x+u)^{2s}} - Z_h(s, u, 1)\right] \\ & -\frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1+2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) b_k(s+1). \end{aligned} \right.$$

Un calcul analogue s'applique à b'_k. Pour passer de b_k à b'_k, il suffit de changer x en $(x-1)$ et u en $1+u' = 2-u$ dans l'équation (18), donc aussi dans (19) et dans l'expression (20). L'équation (21) devra ainsi être remplacée par

$$(22). \quad \left\{ \begin{aligned} b'_k(s) = & \frac{1}{k\pi}\left[\sum_{x=h+1}^{\infty}\frac{1}{(x-u)^{2s}} - Z_h(s, 1-u, 0)\right] \\ & -\frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1+2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) b'_k(s+1). \end{aligned} \right.$$

72. Théorème. *La fonction* $b_k - b'_k$ *peut se mettre sous la forme*

$$b_k - b'_k = \frac{1}{k\pi}\left[\sum_{x=h}^{\infty}\frac{1}{(x+u)^{2s}} - \sum_{x=h+1}^{\infty}\frac{1}{(x-u)^{2s}}\right]$$
$$+ \frac{1}{k\pi}[Z_h(s, 1-u, 0) - Z_h(s, u, 1)] + \frac{\theta_1(s, k)}{k^2},$$

où l'on désigne par $\theta_1(s, k)$ *une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. En effet, en additionnant les formules (21) et (22) du numéro précédent, on voit que, à part un facteur numérique indépendant de k, la fonction $\theta_1(s, k)$ a pour expression

$$\left(1 + 2\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right)[b_k(s+1) - b'_k(s+1)]$$

et il suffit d'appliquer les théorèmes des n°s 69 et 70.

§ 5. *Étude de* $\mathcal{G}_h(s, u, v) + \mathcal{G}_h(s, 1-u, 1-v)$

73. *Développement trigonométrique.* Ce développement est immédiatement fourni par les formules (3) et (5) des n°s 58 et 59. Il est de la forme

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}_h(s,u,v) + \mathcal{G}_h(s,1-u,1-v) &= \frac{1}{2}(a_0 + a'_0) + \sum (a_k + a'_k)\cos 2k\pi v \\ &\quad + \sum (b_k - b'_k)\sin 2k\pi v. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons $a_k + a'_k$ et $b_k - b'_k$ par leurs expressions fournies par les théorèmes des n°s 67 et 72; posons en abrégé (comme au n° 62)

$$\zeta_{2,h}(u, 2s) = \sum_{x=h}^{\infty} \frac{1}{(x+u)^{2s}} - \sum_{x=h+1}^{\infty} \frac{1}{(x-u)^{2s}};$$

enfin, remarquons que l'on a, dans l'intervalle (0, 1) de v,

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi v}{k} = \frac{1}{2} - v.$$

La formule (23) pourra se mettre sous la forme

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}_h(s,u,v) + \mathcal{G}_h(s,1-u,1-v) &= \frac{1}{2}(a_0 + a'_0) + \left(\frac{1}{2} - v\right)\zeta_{2,h}(2s, u) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} - v\right)[Z_h(s, u, 1) - Z_h(s, 1-u, 0)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta(s,k)\cos 2k\pi v}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_1(s,k)\sin 2k\pi v}{k^2}. \end{aligned} \right.$$

On déduit de là le théorème suivant :

74. Théorème. *La fonction* $\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1-u, 1-v)$ *peut se mettre sous la forme*

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ (*).

Démonstration. Le théorème sera vrai pour $\mathcal{G}$, s'il l'est pour $\mathcal{G}_h$; considérons donc la décomposition (24). La fonction $\frac{1}{2}(a_0 + a'_0)$ peut se mettre sous la forme indiquée dans le théorème (n° 61). Il faut donc montrer que les autres fonctions qui figurent au second membre de la formule (24) sont de la forme $\theta(s)$. Pour $\zeta_{2,h}(2s, u)$, la chose a déjà été dite au n° 62 ; elle l'a été au n° 28 pour la fonction suivante. Il reste donc à considérer une des deux dernières sommes. Montrons, par exemple, que l'on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(s, k)\cos 2k\pi v}{k^2} = \theta(s).$$

Pour cela, posons

$$\theta(s, k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{k,n}}{1.2\ldots n}s^n;$$

on aura, Δ étant indépendant de k,

$$\text{mod } A_{k,n} < (\Delta ln)^n.$$

Donc, si l'on pose aussi

$$(25). \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(s, k)\cos 2k\pi v}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{1.2\ldots n}s^n,$$

(*) Une analyse analogue s'applique à $\mathcal{G}(s, u, v) - \mathcal{G}(s, 1-u, 1-v)$. On peut montrer que cette fonction possède tous les pôles de $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$, mais que son quotient par $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ vérifie la condition Θ. On en conclut facilement que le quotient de $(s-1)\,\mathcal{G}(s, u, v)$ par $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ est aussi une fonction entière qui vérifie la condition Θ. On reconnaît ainsi que $\mathcal{G}(s, u, v)$ est le quotient de deux fonctions du premier genre.

on aura

$$\text{mod } B_n = \text{mod} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{k,n} \cos 2k\pi v}{k^2} < (\Delta ln)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

$$\text{mod } B_n < \frac{\pi^2}{6} (\Delta ln)^n,$$

c'est-à-dire que la fonction (25) vérifie aussi la condition Θ.

CHAPITRE V

Étude de la fonction $\mathcal{G}(s, 0, v)$

75. *Définition.* La fonction $\mathcal{G}(s, 0, v)$ est un cas particulier plus simple de la fonction $\mathcal{G}(s, u, v)$ du chapitre précédent, mais un cas que nous avons formellement exclu, savoir celui où $u = 0$. Par contre, nous supposerons, comme au chapitre précédent, que v est compris entre 0 et 1 (limites exclues). On a alors, par définition (n° 56),

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad \mathcal{G}(s, 0, v) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=0}^{x-1} \frac{1}{[x^2 - \gamma (y + v)^2]^s}.$$

76. *Développement trigonométrique.* Ce développement, valable dans l'intervalle (0, 1) de v, sera de la forme

$$(2). \quad . \quad . \quad \mathcal{G}(s, 0\ v) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi v + b_k \sin 2k\pi v,$$

où les coefficients ont pour valeur (comme dans les formules (6) du n° 59)

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= 2 \sum_{x=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dv}{(x^2 - \gamma v^2)^s}, \\ a_k &= 2 \sum_{x=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos 2k\pi v dv}{(x^2 - \gamma v^2)^s}, \\ b_k &= 2 \sum_{x=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin 2k\pi v dv}{(x^2 - \gamma v^2)^s}. \end{aligned} \right.$$

77. Théorème. *La fonction* a_0 *est une fonction méromorphe de* s, *possédant un pôle unique et simple* $s = 1$ *et qui peut se mettre sous la forme*

$$a_0 = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \log \frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} \frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

où θ (s) *est une fonction entière qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. En effet, en changeant la variable d'intégration v en vx dans la formule (3), il vient

$$a_0 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-1}} \int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} = 2\zeta(2s-1) \int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}.$$

Comme on a, ainsi que nous allons le montrer

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \zeta(2s-1) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

la démonstration s'achèvera comme celle du n° 61. Il reste seulement à démontrer la formule (4). Pour cela, écrivons la formule (7) du n° 7 de la seconde partie du Mémoire sous la forme suivante, qui suppose seulement $\mathfrak{R}(s) > 1$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left[\zeta_1(\alpha, s) - \frac{1}{\alpha^s}\right] = \frac{2}{s-1} + \int_1^{\infty} [\psi_1(\alpha, x) - e^{-\alpha^2\pi x}] x^{\frac{s}{2}-1} dx$$
$$- \int_0^1 e^{-\alpha^2\pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos 2k\pi\alpha \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x} x^{-\frac{1+s}{2}} dx.$$

Dans cette formule, on peut faire tendre α vers zéro. Or on a

$$\lim_{\alpha=0}\left[\zeta_1(\alpha, s) - \frac{1}{\alpha^s}\right] = 2\zeta(s);$$

il viendra, par conséquent, à la limite, pour $\alpha = 0$,

$$2\zeta(s) = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{1}{s-1} + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^\infty [\psi_1(0, x) - 1] x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

$$- \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_1^\infty e^{-k^2\pi x} x^{-\frac{1+s}{2}} dx.$$

Tous ces termes, sauf le premier, sont de la forme $\theta(s)$ et l'on a, par conséquent,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \theta(s).$$

Cette formule est équivalente à la formule (4) qu'il s'agissait d'établir.

78. Théorème. *La fonction* a_k *du n° 76 est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞.

En effet, en changeant la variable d'intégration v en vx dans la seconde des formules (3) on trouve

$$a_k = 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi vx}{x^{2s-1}},$$

et il suffit d'appliquer le théorème du n° 54.

79. Théorème. *La dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial\gamma} a_k$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞ (conséquence du n° 55).

80. *Transformation de* a_k. On peut faire subir à a_k dans le cas actuel une transformation identique à celle que l'on a fait subir à a'_k au n° 66 et qui est exprimée par l'équation (16). Nous

rencontrons simplement ici le cas particulier où $1 - u$ est égal à zéro dans cette équation. Si l'on observe que

$$-\left[\frac{\partial}{\partial v} Z(s, 0, 1 - v)\right]_{v=1} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{2\gamma s x}{(x^2 - \gamma x^2)^{s+1}}$$
$$= \frac{2\gamma s}{(1-\gamma)^{s+1}} \zeta(2s+1),$$

l'équation (16) du n° 66 sera remplacée par

$$(5) \qquad a_k(s) = \frac{\gamma}{(k\pi)^2} \frac{s\zeta(2s+1)}{(1-\gamma)^{s+1}} - \frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1 + 2\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) a_k(s+1).$$

On déduit de cette formule le théorème suivant :

81. Théorème. *La fonction* a_k *peut se mettre sous la forme*

$$a_k = \frac{\theta(s, k)}{k^2},$$

où $\theta(s, k)$ *désigne une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. En effet, en négligeant un facteur numérique indépendant de k, la fonction $\theta(s, k)$ a pour expression, eu égard à la formule (5) du numéro précédent,

$$\frac{s\zeta(2s+1)}{(1-\gamma)^{s+1}} - s\left(1 + 2\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) a_k(s+1).$$

Le premier terme est indépendant de k et il vérifie la condition Θ, parce que $s\zeta(2s+1)$ vérifie cette condition, en vertu de la formule (4) au n° 77, où l'on changera s en $s+1$. Le second terme vérifie *uniformément* la condition Θ par les théorèmes des n°s 78 et 79.

82. Théorème. *La fonction* $\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v)$ *peut se mettre sous la forme*

$$\frac{1}{s-1} \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \log \frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s)$$

où $\theta(s)$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ (*).

Démonstration. On tire de la formule (2) du n° 76

$$\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi v.$$

Il vient alors par les théorèmes des n°s 77 et 81

$$\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s)$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(s, k)\cos 2k\pi v}{k^2},$$

et la démonstration s'achève comme au n° 74.

83. *Remarque.* On peut faire sur b_k une étude analogue à celle que nous avons faite de a_k. Cette étude nous étant inutile, nous ne la ferons pas et nous nous contenterons d'indiquer le résultat auquel elle conduirait. On trouverait que b_k est une fonction méromorphe de s qui possède tous les pôles de $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$. Mais si l'on fait le quotient de b_k par $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, le quotient est une fonction entière dans tout le plan et vérifie la condition Θ (**).

(*) Une analyse analogue s'applique à $\mathcal{G}(s, 0, v) - \mathcal{G}(s, 0, 1 - v)$. Cette fonction possède tous les pôles de $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, mais son quotient par $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$ est une fonction entière qui vérifie la condition Θ. On reconnaît ainsi que $(s-1)\,\mathcal{G}(s, 0, v) : \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$ est aussi une fonction qui vérifie la condition Θ et que, par conséquent, $\mathcal{G}(s, 0, v)$ est le quotient de deux fonctions du premier genre.

(**) Cela résulte de l'application de la remarque ajoutée en note au n° 53.

CHAPITRE VI

Étude de la fonction Q (s, c)

§ 1. *Définition de* Q(s, c)

84. *Première définition de* Q (s, c). La définition de cette fonction se fait par l'intermédiaire d'une forme quadratique du déterminant positif D et de la classe c. Pour cela, on choisit dans la classe c, supposée proprement primitive, une forme

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

où $a > 0$ (il y a une infinité de formes dans ce cas) et l'on pose, pour $\mathcal{R}(s) > 1$,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c) = \sum_{x, y} \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s}.$$

La somme double ne s'étend pas ici, comme dans le cas des déterminants négatifs (voir 2e partie, n° 10), à toutes les valeurs positives et négatives de x et y qui rendent f impaire et première à D, elle s'étend seulement à celles de ces valeurs qui vérifient, en outre, les deux conditions

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y \gtreqless 0, \quad (ax + by) > \frac{T}{U} y,$$

où (T, U) sont les plus petites solutions positives de l'équation de Pell : $T^2 - DU^2 = 1$.

85. *Remarque I.* La forme $(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ ne prendra que des valeurs positives et non nulles dans l'équation (1). C'est la conséquence de l'hypothèse $a > 0$ et des conditions (2). Pour le montrer, écrivons f comme il suit :

$$(3). \quad . \quad . \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}[(ax + by)^2 - Dy^2];$$

la quantité entre crochets sera positive, car on aura par (2)

$$(ax^2 + by)^2 - Dy^2 > \left(\frac{T^2}{U^2} - D\right) y^2 = \frac{1}{U^2} y^2 \geqq 0.$$

86. *Remarque II.* Il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur qu'il faut attribuer à chacun des termes de la formule (1). Pour s réel, on attribuera à chaque terme sa valeur réelle; pour s imaginaire, les valeurs qui se déduisent des précédentes par voie de continuité.

87. *Remarque III.* Sauf la restriction $a > 0$, la définition de $Q(s, c)$ ne dépend nullement du choix de la forme f dans la classe c.

Nous allons mettre $Q(s, c)$ sous une forme différente dans laquelle cette propriété sera évidente. D'abord, en mettant en évidence les facteurs communs de x et y, $Q(s, c)$ se décompose en un produit de deux facteurs

$$Q(s, c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \times \sum_{x', y'} \frac{1}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^s}.$$

Dans le premier facteur, n prend toutes les valeurs entières de 1 à ∞ qui sont premières à $2D$; dans le second, x' et y' sont assujettis aux mêmes conditions que x et y, mais sont en outre premiers entre eux.

Or Dirichlet a montré que l'on a

$$\sum_{x', y'} \frac{1}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^s} = \sum_{m} \frac{2^{\mu}}{m^s},$$

où μ est le nombre des facteurs premiers différents de m, et où m désigne successivement tous les nombres positifs, premiers à $2D$ et représentables par la forme f, et, par suite, par toutes les formes de la classe c (Voir Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, 4e édition, § 88). Notre remarque est donc justifiée.

88. *Choix particulier de la forme* f. En vertu de la remarque qui précède, nous pouvons choisir la forme f de manière à simplifier les raisonnements. Ce choix sera analogue à celui que nous avons fait dans le cas des déterminants négatifs (3e partie, n° 8), sans cependant lui correspondre exactement.

Nous commencerons par nous donner le troisième coefficient c positif et premier à 2D, ce qui est toujours possible. Ensuite on peut faire en sorte que b soit > 0, divisible par D et, en outre, pair ou impair en même temps que D, de telle façon que

$$a = \frac{b^2 - D}{c}$$

soit positif (comme on l'a stipulé plus haut) et, en outre, pair et divisible par D. En effet, si b ne vérifiait pas ces conditions, par une substitution

$$x = x', \qquad y = \lambda x' + y',$$

où λ est une inconnue à déterminer, on remplacerait la forme (a, b, c) par une autre équivalente (a', b', c) et b' serait déterminé par la congruence

$$b' = b + \lambda c \equiv 0 \pmod{D},$$

à laquelle on ajouterait, en toute hypothèse, la condition $b' > 0$ et, dans l'hypothèse seulement de D impair, la condition $b' \equiv 1 \pmod{2}$.

La forme f étant ainsi choisie, il suffit pour que $ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit premier à 2D que y soit premier à 2D, tandis que x n'est plus astreint à aucune restriction.

§ 2. *Réduction de* Q (s, c) *à* $\mathcal{G}$ (s, u, v)

89. La forme $(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ étant choisie comme nous venons de le dire, la fonction $Q(s, c)$ sera définie par la formule (1), dans laquelle on donne à y toutes les valeurs premières

à 2D et à x toutes les valeurs entières quelconques qui vérifient les conditions (2), savoir

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y > 0, \quad (ax + by) > \frac{T}{U} y.$$

Dans ces conditions, la fonction Q (s, c) se ramène à une somme de fonctions $\mathcal{G}(s,u,v)$ en nombre limité dans lesquels γ a une valeur constante $DU^2 : T^2$. Cette décomposition correspond, comme nous allons le montrer, au partage en plusieurs groupes des valeurs de x et y à substituer dans f.

90. *Transformation de* f *par les substitutions* (S) et (S′). Si l'on fait la substitution

$$(S). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x = \alpha + 2bDx', \\ y = \beta + 2aDy', \end{cases}$$

on réduit f à

$$f = 4ab^2D^2 \left[\left(\frac{a\alpha + b\beta}{2abD} + x' + y' \right)^2 - \frac{D}{b^2} \left(\frac{\beta}{2aD} + y' \right)^2 \right].$$

Désignons par E (x) le plus grand entier contenu dans x et posons, en abrégé,

$$(4). \quad . \quad . \quad u' = \frac{a\alpha + b\beta}{2abD} - E \frac{a\alpha + b\beta}{2abD}, \quad v' = \frac{\beta}{2aD};$$

la forme f s'écrira plus simplement

$$f = 4ab^2D^2 \left[\left(u' + x' + y' + E \frac{a\alpha + b\beta}{2abD} \right)^2 - \frac{D}{b^2} (v' + y')^2 \right].$$

Si l'on fait maintenant une seconde substitution

$$(S'). \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x' + y' + E \dfrac{a\alpha + b\beta}{2abD} = \alpha' + Tx'', \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y' = \beta' + bUy'', \end{cases}$$

et si l'on pose en abrégé

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad u = \frac{u' + \alpha'}{T}, \quad v = \frac{v' + \beta'}{bU}, \quad \gamma = \frac{DU^2}{T^2},$$

on réduit simplement f à

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad f = 4ab^2D^2T^2\,[(u + x'')^2 - \gamma\,(v + y'')^2].$$

91. *Conditions auxquelles sont soumises les nouvelles variables.* Nous allons montrer qu'on peut engendrer toutes les valeurs de x et y à substituer dans f, en attribuant à $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ et par suite à (u, v) certains systèmes de valeurs, en nombre limité, pour chacun desquels x'' et y'' prendront aussi des systèmes de valeurs qu'il s'agit de définir.

Toutes les valeurs entières de x et toutes les valeurs premières à 2D de y sont fournies par le système (S) en donnant :

à α les $2b$D valeurs entières $\overline{\gtrless} 0$ et $< 2b$D,

à β les $a\varphi$ (2D) valeurs > 0, $< 2a$D et premières à 2D;

ensuite, pour chaque système (α, β), à x' et y' toutes les valeurs entières possibles.

Mais, d'autre part, toutes les valeurs entières de x' et y' sont fournies par le système (S'), en donnant :

à α' les T valeurs 0, 1, 2,... T — 1,

à β' les bU valeurs 0, 1, 2,... bU — 1 ;

ensuite à x'', y'' toutes les valeurs entières possibles.

Pour obtenir toutes les valeurs de x et de y à substituer dans f, nous avons donc simplement à chercher, pour chaque système de $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$, les valeurs entières x'' et y'' qui vérifient les conditions (2) transformées par les substitutions (S) et (S').

La substitution (S) dans les conditions (2) donne

$$y' \overline{\gtrless} 0, \quad u' + x' + y' + E\frac{a\alpha + b\beta}{2abD} > \frac{T}{bU}(v' + y'),$$

puis la substitution (S')

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y'' \overline{\gtrless} 0, \qquad u + x'' > v + y''.$$

On voit ainsi que, pour chaque système de valeurs de

$(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$, donc de (u, v), les nouvelles variables x'' et y'' sont assujetties aux mêmes conditions que dans la somme double qui sert à définir $\mathcal{G}$ (n° 56).

Les quantités u et v sont comprises entre *zéro* et *un*, car, eu égard aux systèmes de valeurs de α et de β, ces équations (4) donnent immédiatement

$$0 \overline{\overline{<}} u' < 1, \qquad 0 < v' < 1;$$

puis, par les équations (5), on obtient les inégalités

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0 \overline{\overline{<}} u < 1, \qquad 0 < v < 1.$$

On voit que les deux limites $(0, 1)$ sont exclues pour v et la limite 1 seule pour u. Quant à la quantité γ, elle est indépendante de u et de v, elle est > 0 et < 1.

92. *Réduction de* Q (s, c) à $\mathcal{G}$ (s, u, v). Remplaçons, dans la formule (1), f par sa valeur (6) et la sommation par rapport à (x, y) par des sommations par rapport à (x'', y'') et à $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ ou (u, v). On aura, eu égard aux conclusions du numéro précédent,

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c) = \frac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s} \sum_{u, v} \mathcal{G}(s, u, v).$$

Le nombre des termes de cette somme, ou le nombre des systèmes de valeurs de (u, v), est égal au nombre des systèmes de valeurs de $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$. Ces valeurs ont été énumérées au numéro précédent ; le nombre de systèmes qu'on peut former avec elles sera

$$2ab^2TUD\varphi(2D).$$

§ 3. *Remarques sur les systèmes de valeurs de* (u, v) (*)

93. *A deux systèmes de valeurs de* $(\alpha, \beta, \alpha' \beta')$ *non identiques correspondent deux systèmes de valeurs de* (u, v) *non identiques.*

(*) On ne perdra pas de vue que *toutes* les lettres qui interviennent dans ce paragraphe représentent des quantités positives et, de plus, sauf (α, v, u', v'), des nombres entiers.

Montrons, en effet, que (u, v) ne peuvent reprendre les mêmes valeurs que si $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ reprennent aussi les mêmes valeurs.

D'abord, les deux expressions (5) au n° 90

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u = \frac{u' + \alpha'}{T}, \quad v = \frac{v' + \beta'}{bU}$$

où (u', v') sont des fractions proprement dites et (α', β') des entiers, ne peuvent reprendre les mêmes valeurs que si (α', β') d'une part et (u', v') de l'autre reprennent les mêmes valeurs.

En second lieu, les expressions (4)

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad v' = \frac{\beta}{2aD}, \quad u' = \frac{a\alpha + b\beta}{2abD} - E\left(\frac{a\alpha + b\beta}{2abD}\right)$$

ne peuvent reprendre les mêmes valeurs que si β d'abord reprend la même valeur, et par conséquent aussi, puisque $\frac{a\alpha}{2abD}$ est une fraction proprement dite, que si α reprend la même valeur.

94. *Pour aucun système de valeurs de* $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ *on ne peut avoir* $u = v$.

En effet, l'égalité des valeurs (5) au numéro précédent donnerait

$$bU(u' + \alpha') = T(v' + \beta').$$

En remplaçant v' par sa valeur (4) et multipliant par $2a$, il viendrait

$$2abU(u' + \alpha') = T\left(\frac{\beta}{D} + 2a\beta'\right).$$

Le premier membre est entier, car l'expression (4) de u' au numéro précédent prouve (a et b étant multiples de D, n° 88) que $2abu'$ est entier; d'autre part, le second membre est fractionnaire, T et β étant premiers à D. Donc, etc.

95. *On ne peut avoir non plus* $v = \frac{1}{2}$.

En effet, dans ce cas, la relation (5) montre que $2(v'+\beta')$ donc $2v' = \frac{\beta}{a\mathrm{D}}$ serait entier; ce qui ne peut être, β étant premier avec D. Donc, etc.

96. *Si* u *n'est pas nul, au système* (u, v) *correspond le système non identique* (1 — u, 1 — v).

En effet, si α est différent de zéro, changeons (α, β) en $(2b\mathrm{D}-\alpha,\ 2a\mathrm{D}-\beta)$ et, si α est nul, changeons seulement β en $2a\mathrm{D}-\beta$; les quantités (u', v') données par les formules (4) au n° 93 seront changées en $(1-u',\ 1-v')$. Si donc on change encore (α', β') en $(\mathrm{T}-\alpha'-1, b\mathrm{U}-\beta'-1)$, les quantités (u, v) données par les formules (5) seront changées en $(1-u, 1-v)$. Or nous avons remplacé de la sorte $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ par un autre système de valeurs qu'on doit attribuer à ces quantités; de plus, les deux systèmes (u, v) et $(1-u, 1-v)$ sont différents en vertu de la remarque précédente. Donc, etc.

97. *Si* u *est égal à zéro, au système* (0, v) *correspond le système non identique* $(0, 1-v)$.

Si $u=0$, la relation (5) donne $u'=0$ et $\alpha'=0$. Changeons (α, β) en $(2b\mathrm{D}-\alpha,\ 2a\mathrm{D}-\beta)$ dans les relations (4); u' restera nul et v' sera changé en $1-v'$. Donc, si l'on conserve $\alpha'=0$, mais change encore β' en $(b\mathrm{U}-\beta'-1)$ dans les formules (5), u restera nul et v se changera en $1-v$. Or nous avons remplacé ainsi le système $(\alpha, \beta, 0, \beta')$ par le système $(2b\mathrm{D}-\alpha,\ 2a\mathrm{D}-\beta,\ 0,\ b\mathrm{U}-\beta'-1)$, qui se présente également. Donc, etc.

98. *La valeur* u = 0 *se présentera si* D *est pair et ne se présentera pas si* D *est impair.*

Faisons observer d'abord que l'équation $b^2-ac=\mathrm{D}$, où a et b sont divisibles par D, c premier à 2D et b de même parité que D, peut s'écrire

$$\mathrm{D}\left(\frac{b}{\mathrm{D}}\right)^2-\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)c=1,$$

et, sous cette forme, elle met en évidence que D et $\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)$ sont de parité différente et que $\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)$ et $\left(\frac{b}{\mathrm{D}}\right)$ sont premiers entre eux.

Revenons-en maintenant à notre remarque. Si $u=0$, on doit avoir $u'=0$. Cherchons donc les valeurs de (α,β) pour lesquelles on aura $u'=0$. Il faut et il suffit pour cela (voir l'équation 4) que $\frac{a\alpha+b\beta}{2ab\mathrm{D}}$, qui est >0 et <2, soit entier, c'est-à-dire que l'on ait

$$a\alpha+b\beta=2ab\mathrm{D}.$$

Mettons cette équation sous la forme

$$\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)\alpha+\left(\frac{b}{\mathrm{D}}\right)\beta=2\mathrm{D}^2\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)\left(\frac{b}{\mathrm{D}}\right).$$

Puisque $\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)$ et $\left(\frac{b}{\mathrm{D}}\right)$ sont premiers entre eux, il faut poser, pour vérifier cette équation par des valeurs entières de α et de β,

$$\alpha=\left(\frac{b}{\mathrm{D}}\right)x,\qquad \beta=\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)y$$

et chercher les solutions entières de

$$x+y=2\mathrm{D}^2.$$

Si D est pair, $\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)$ est impair, puisque D et $\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)$ sont de parité différente, et toutes les solutions (x, y) positives et premières entre elles de cette équation donnent des valeurs de α et de β qui se présentent dans la question.

Si D est impair, $\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)$ est pair et, les valeurs de β étant paires, sont à rejeter comme ne se présentant pas dans la question.

§ 4. *Propriétés analytiques de* Q (s, c)

99. *Transformation de la formule* (9). Pour fixer les idées, supposons que D soit pair et considérons la formule (9), savoir

$$(9).\quad .\quad .\quad .\quad .\quad \mathrm{Q}(s,c)=\frac{1}{(4ab^2\mathrm{D}^2\mathrm{T}^2)^s}\sum_{u,v}\mathcal{G}(s,u,v).$$

On peut ranger, en vertu des remarques du paragraphe précé-

dent, les systèmes de valeurs de (u, v) par couples, ceux où u n'est pas nul étant

$$(u, v), \qquad (1 - u, 1 - v);$$

ceux où u est nul étant

$$(0, v), \qquad (0, 1 - v).$$

En accouplant de même les valeurs de $\mathcal{G}$, la fonction $Q(s, c)$ se met sous la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} Q(s, c) = & \frac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s} \mathop{S}_{u>v} \Big[\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1 - u, 1 - v) \Big] \\ & + \frac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s} \mathop{S}_{v<\frac{1}{2}} \Big[\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v) \Big], \end{aligned} \right.$$

la première somme s'étendant à tous les systèmes de valeurs de (u, v) où $u > v$; la seconde aux systèmes $(0, v)$, où $v < \frac{1}{2}$ Si D était impair, les valeurs $u = 0$ ne se présenteraient pas et il faudrait supprimer la seconde somme.

100. Théorème. *La fonction* Q (s, c) *est une fonction méromorphe de* s *qui n'a qu'un pôle unique et simple* $s = 1$ *et qui peut se mettre sous la forme*

$$Q(s, c) = \frac{1}{s - 1} \frac{\varphi(2D)}{4D\sqrt{D}} \log(T + U\sqrt{D}) + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *désigne une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Chacun des crochets de la formule (10) peut, par les théorèmes des nos 74 ou 82, se mettre sous la forme

$$\frac{1}{s - 1} \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \log \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{1 - \sqrt{\gamma}} + \theta(s).$$

Remplaçons $\sqrt{\gamma}$ par sa valeur $U\sqrt{D} : T$ et observons que

$$\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} = \frac{T+U\sqrt{D}}{T-U\sqrt{D}} = \left(T+U\sqrt{D}\right)^2;$$

cette expression prendra la forme

$$\frac{1}{s-1}\frac{T}{U\sqrt{D}}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)+\theta(s).$$

Le nombre total des crochets dans la formule (10) est égal à la moitié du nombre total des valeurs de (u, v), c'est-à-dire à $ab^2TUD\varphi(2D)$ en vertu de la conclusion n° 92. Donc la somme de tous les crochets est une expression de la forme

$$\frac{ab^2T^2\sqrt{D}\varphi(2D)}{s-1}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)+\theta(s).$$

D'autre part, en le développant suivant les puissances de $(s-1)$, le facteur commun $(4ab^2D^2T^2)^{-s}$, qui est en évidence dans la formule (10), devient de la forme

$$\frac{1}{4ab^2D^2T^2}+(s-1)\,\theta(s).$$

Le second membre de la formule (10) doit être égal au produit de ces deux dernières expressions, ce qui démontre le théorème.

CHAPITRE VII

Généralisation des théorèmes de la troisième partie. Lois asymptotiques

101. Nous pouvons nous borner, dans ce chapitre, à rappeler les résultats de la troisième partie.

On a vu (troisième partie, chap. II, §§ 1 et 2) que l'étude des nombres premiers représentables par une forme quadratique de

déterminant négatif $(-\Delta)$ repose sur l'équation fondamentale

$$(1). \quad . \quad . \quad L(s, k) = P(s) \prod_q \frac{1}{[1 - q^{-s}k(c_q)][1 - q^{-s}k(c_q^{-1})]},$$

où $L(s, k)$ est une fonction de s liée au caractère k et qui se définit au moyen de la fonction $Q(s, c)$ par la formule

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad L(s, k) = \sum_{i=1}^{i=h} k(c_i)\, Q(s, c_i),$$

cette somme s'étendant à toutes les classes $c_1, c_2, \ldots c_h$ proprement primitives.

Ces équations subsistent dans le cas d'un déterminant positif D et se démontrent par un raisonnement identique, mais $Q(s, c)$ désigne alors la fonction étudiée au chapitre précédent, qui n'est pas exactement définie comme dans la troisième partie.

Au second membre de (1), $P(s)$ désigne le produit

$$P(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}},$$

étendu à tous les nombres premiers p dont D est non-résidu, tandis que le produit Π_q s'étend à tous les nombres premiers q dont D est résiduquadratique. Enfin c_q et c_q^{-1} sont les deux classes opposées dans lesquelles q peut se représenter.

102. Toutes les conclusions ultérieures de la troisième partie reposent sur des transformations des équations (1) et (2) et sur les propriétés suivantes des fonctions $L(s, k)$:

1° *La fonction* $(s-1)\, L(s, k_0)$, *dans le cas du caractère principal, et* $L(s, k)$, *dans le cas d'un autre caractère, sont des fonctions entières du premier genre* (troisième partie, n° 20).

2° *Si l'on représente, en général, par* $\rho(k)$ *les zéros de* $L(s, k)$, *la série*

$$\sum_\rho \frac{1}{[\rho(k)]^m}$$

sera absolument convergente pour $m > 2$ (troisième partie, n° 21).

Ces théorèmes subsistent dans le cas d'un déterminant positif, car ils résultent du théorème suivant que nous allons démontrer et qu'il serait très facile d'étendre aux déterminants négatifs :

3° *La fonction* $(s-1)\,L(s, k_0)$, *et les fonctions* $L(s, k)$ *pour* k *différent de* k_0, *sont des fonctions entières qui vérifient la condition* Θ.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème du n° 100 et de la formule (2) ci-dessus, pourvu qu'on se rappelle que la somme $k(c_1) + k(c_2) + \cdots + k(c_h)$ est nulle, sauf dans le cas du caractère principal.

On sera donc conduit, comme dans la troisième partie, aux lois asymptotiques suivantes :

103. 1° *Si l'on désigne par* h *le nombre des classes de formes proprement primitives du déterminant* D, *les expressions*

$$\frac{2h}{y}\sum lq_c, \quad \textit{si } c \textit{ est une classe bilatérale,}$$

$$\frac{h}{y}\sum lq_c, \quad \textit{dans le cas contraire,}$$

expressions où les sommes s'étendent aux nombres premiers $< y$ *et représentables par la classe* c *ont pour limite l'unité quand* y *tend vers l'infini.*

2° *Les différences correspondantes :*

$$2h\sum\frac{lq_c}{q_c} - ly \quad \text{ou} \quad h\sum\frac{lq_c}{q_c} - ly,$$

tendent vers des limites finies et déterminées quand y *tend vers l'infini.*

3° *Le nombre des nombres premiers* $< y$ *et représentables par la classe* c *a pour expression asymptotique*

$$\frac{1+\varepsilon}{2h}\frac{y}{ly} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\varepsilon}{h}\frac{y}{ly},$$

suivant que c *est bilatérale ou non,* ε *étant infiniment petit pour* y *infiniment grand.*

4° *La série, étendue aux nombres premiers* q *dont* D *est résidu quadratique rangés par ordre de grandeur,*

$$\sum_q [k(c_q) + k(c_q^{-1})] \frac{lq}{q^u},$$

est convergente pour $\Re(u) = 1$, *pourvu que le caractère* k *soit différent du principal.*

ERRATA

Page 1, ligne 4, au lieu de théorème du n° 99, lisez théorème du n° 100.

» 11, » 9, il faut changer de signe les deux valeurs de (AB).

» 11, » 13, id. la valeur de (BA).

» 11, » 18, id. le facteur $(e^{\pi is} - c^{-\pi is})$.

» 11, » 20, id. le second membre de la formule (2).

» 12, id. les seconds membres des formules (3) et (4).

» 13, » 7, id. le second membre de la formule qui termine l'énoncé du théorème.

» 14, id. l'intégrale aux limites $-\pi$ et $+\pi$ dans toutes les formules.

» 16, dans la dernière équation, la première différentielle que l'on trouve au second membre doit être dy au lieu de dx.

» 18, dans les deux formules où elle figure, l'intégrale aux limites $-\pi$ et $+\pi$ doit être changée de signe.

» 29, ligne 3. La limite inférieure de l'intégrale est 0 au lieu de t.

» 35. Ajoutez au n° 29 ce qui suit : Toutefois l'application du théorème du n° 19 à la formule (8) n'est pas absolument immédiate, parce qu'il y a une discontinuité due à ce que $\sqrt{1-t}$ s'annule, au dénominateur de la fonction sous le signe d'intégration aux limites 0 et 1. Mais le théorème du n° 19 s'applique à l'intégrale prise aux limites 0 et $(1-\varepsilon)$ et l'intégrale restante, aux limites $(1-\varepsilon)$ et 1, ne donne lieu qu'à une difficulté apparente, car on y fait disparaître la discontinuité par un changement de variable.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

PAR

M. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain

CINQUIÈME PARTIE

NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES SIMULTANÉMENT PAR UNE FORME LINÉAIRE ET UNE FORME QUADRATIQUE

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

—

1898

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1897, t. XXI, 2e partie.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

CINQUIÈME PARTIE

NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES SIMULTANÉMENT PAR UNE FORME LINÉAIRE ET UNE FORME QUADRATIQUE

PRÉLIMINAIRE

Pour démontrer que toute progression $Mx+N$ renferme une infinité de nombres premiers qui sont en même temps d'une forme quadratique donnée, on est amené à considérer des fonctions $L(s, k, \chi)$ analogues aux fonctions $L(s, k)$ des parties précédentes du Mémoire, mais où l'on combine ensemble les caractères de classes avec les caractères (mod. M).

Une simple généralisation des méthodes antérieures montre que toutes les fonctions $(s-1)\,L(s, k, \chi)$ sont entières et du premier genre. Si cette généralisation suffisait, nous pourrions nous dispenser d'écrire cette partie complémentaire de notre travail. Mais il faut savoir déterminer quelles sont les fonctions $L(s, k, \chi)$ qui possèdent en réalité un pôle pour $s=1$. Cette détermination exige des considérations plus nouvelles.

La question peut être tranchée directement par l'examen immédiat des fonctions. C'est la méthode suivie par M. Meyer, qui est longue et pénible. Il vaut mieux profiter des avantages

que donne l'emploi des dérivées logarithmiques et rattacher la solution du problème aux résultats établis dans les parties précédentes du Mémoire. C'est ainsi que nous allons procéder. Sous cette forme, la démonstration devient élégante et simple; elle achève de satisfaire aux *desiderata* de M. P. Bachmann, signalés dans les préliminaires de notre troisième partie.

CHAPITRE I

Analyse des fonctions qui interviennent dans la démonstration

§ 1. *Étude de la fonction* $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)$

1. *Choix particulier d'une forme quadratique.* La fonction qui va nous occuper se rattache à la considération d'une forme quadratique, proprement primitive, du déterminant D :

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

que nous représenterons souvent, en abrégé, par

$$(x, y).$$

Si D est un déterminant négatif $(-\Delta)$, cette forme sera supposée être positive et avoir ses trois coefficients positifs. Aucune autre restriction n'est supposée dans le paragraphe actuel.

Si D est positif, il faut des conditions plus particulières. Comme il n'y a pas d'intérêt à réduire ces conditions, nous ferons dès maintenant les hypothèses qui se rencontreront plus tard. Nous supposerons que a, b et c sont positifs, que a et b sont divisibles par D, que a est pair et que c est premier à 2D. Toute forme proprement primitive est, comme on l'a montré dans la quatrième partie (n° 88), équivalente à une autre forme qui vérifie ces conditions.

2. *Définition de* $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)$. Cette définition se rattache à la considération de la forme f que nous venons de particulariser et à celle d'un nombre entier M que nous supposerons ici pair et divisible par D (au chapitre suivant, il sera de plus divisible par 4).

La fonction est définie par la somme double

$$(1). \quad \mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) = \sum_{m, n} \frac{1}{(x, y)^s},$$

où l'on a

$$\begin{cases} x = \alpha + \mathrm{M}m, \\ y = \beta + \mathrm{M}n. \end{cases}$$

Quant aux variables m et n par rapport auxquelles se fait la sommation, elles reçoivent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, si D est négatif; si, au contraire, D est positif, elles reçoivent seulement celles de ces valeurs qui vérifient en outre les deux conditions :

$$(2). \quad y \gtreqless 0, \quad ax + by > \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}} y,$$

où (T, U) sont les plus petites solutions positives de l'équation de Pell : $\mathrm{T}^2 - \mathrm{DU}^2 = 1$.

3. Théorème. *Si* D *est un déterminant négatif* $(-\Delta)$, *la fonction* $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)$ *est une fonction méromorphe de* s *qui n'a que le seul pôle* $s = 1$ *et qui peut se mettre sous la forme*

$$(3). \quad \mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) = \frac{\pi}{\mathrm{M}^2 \sqrt{\Delta}} \frac{1}{s - 1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *désigne une fonction qui vérifie la condition* Θ (quatrième partie, n° 1).

La démonstration est toute pareille à celle qui a été faite dans la troisième partie. On posera

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, t) = \sum_{m, n} e^{-(x, y)t},$$

la somme double ayant le même sens que dans l'équation (1). Puis, par ab substitutions :

$$\begin{cases} m = i + bm', \\ n = k + an', \end{cases} \qquad \begin{cases} i = 0, 1, 2, \ldots (b-1), \\ k = 0, 1, 2, \ldots (a-1), \end{cases}$$

on décomposera, comme au n° 5 de la troisième partie, F en ab sommes partielles :

$$F_{i,k}(t) = \psi_1\left(\alpha'', \frac{ab^2M^2t}{\pi}\right)\psi_1\left(\beta'', \frac{a\Delta M^2t}{\pi}\right),$$

qui ne diffèrent entre elles que par les valeurs de α'', β'' et vérifient toutes (3e partie, n° 3) une relation de la forme

$$F_{i,k}(t) = \frac{\pi}{abM^2\sqrt{\Delta}}\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}e^{-\frac{K}{t}},$$

où $\theta(t)$ reste fini quand t tend vers zéro et où K est positif et indépendant de t.

On a donc aussi, par l'addition de ab relations de cette forme, la relation fonctionnelle

$$F(\alpha, \beta, t) = \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}}\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}e^{-\frac{K}{t}}.$$

On a maintenant, pour $\Re(s) > 1$,

$$\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)\,\Gamma(s) = \int_0^\infty F(\alpha, \beta, t)\,t^{s-1}dt$$
$$= \int_1^\infty + \int_0^1 F(\alpha, \beta, t)\,t^{s-1}dt.$$

Changeons t en 1 : t dans la seconde intégrale, appliquons la relation fonctionnelle qui précède et effectuons une intégration immédiate ; nous trouverons

$$\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)\,\Gamma(s) = \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}}\frac{1}{s-1} + \int_1^\infty F(\alpha, \beta, t)\,t^{s-1}dt$$
$$+ \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right)e^{-Kt}t^{-s}dt.$$

Donc il vient, par l'application du théorème du n° (9) de la quatrième partie,

$$\Gamma(s)\,\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) = \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}}\,\frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

et, si l'on divise par $\Gamma(s)$, le second membre ne change pas de forme, ce qui prouve le théorème.

4. Théorème. *Si le déterminant* D *est positif, si* α *et* β *sont compris entre* 0 *et* M (*limites exclues*) *et si* β *est premier à* D, *la fonction*

$$\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) + \mathfrak{M}(M-\alpha, M-\beta, s)$$

est une fonction méromorphe de s *dans tout le plan, qui peut se mettre sous la forme*

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{M^2\sqrt{D}}\log\left(T + U\sqrt{D}\right)\frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *est une fonction entière qui vérifie la condition* Θ.

On procède exactement comme aux n°s 90, 91 et 92 de la quatrième partie.

Par une première substitution de variables :

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} m = \alpha' + bm', \\ n = \beta' + an', \end{cases}$$

on met d'abord f sous la forme

$$f = ab^2M^2\left[(u' + m'')^2 - \frac{D}{b^2}(v' + n')^2\right],$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$(6) \quad \begin{cases} u' = \dfrac{a(\alpha + M\alpha') + b(\beta + M\beta')}{abM} - E\left(\dfrac{a(\alpha + M\alpha') + b(\beta + M\beta')}{abM}\right), \\ v' = \dfrac{\beta + M\beta'}{aM}, \\ m'' = m' + n' + E\left(\dfrac{a(\alpha + M\alpha') + b(\beta + M\beta')}{abM}\right). \end{cases}$$

Cela fait, on peut engendrer toutes les valeurs entières positives et négatives de m, n, en attribuant à α', β' les systèmes de valeurs (en nombre ab)

$$\alpha' = 0, 1, 2, \ldots (b - 1),$$
$$\beta' = 0, 1, 2, \ldots (a - 1),$$

et en donnant, pour chacun d'eux, à m'' et n' toutes les valeurs entières positives et négatives.

Faisons une deuxième substitution :

$$(7). \quad \left\{ \begin{array}{l} m'' = \alpha'' + \mathrm{T}x', \\ n' = \beta'' + b\mathrm{U}y'; \end{array} \right.$$

la forme f deviendra

$$f = ab^2\mathrm{M}^2\mathrm{T}^2 [(u + x')^2 - \gamma (v + y')^2],$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$(8). \quad u = \frac{u' + \alpha''}{\mathrm{T}}, \quad v = \frac{v' + \beta''}{b\mathrm{U}}, \quad \gamma = \frac{\mathrm{DU}^2}{\mathrm{T}^2}.$$

On peut maintenant engendrer toutes les valeurs entières de m'' et n' en attribuant à α'', β'' les systèmes de valeurs (en nombre bUT)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'' = 0, 1, 2, \ldots (\mathrm{T} - 1), \\ \beta'' = 0, 1, 2, \ldots (b\mathrm{U} - 1), \end{array} \right.$$

et en attribuant encore, pour chacun d'eux, à x' et y' toutes les valeurs entières.

On attribuera donc à x et y toutes les valeurs que prennent ces variables dans la somme $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)$, en donnant à α', β', α'', β'' leurs différents systèmes de valeurs et, pour chacun d'eux, à x' et y' tous les systèmes de valeurs qui vérifient les conditions (2), transformées par les substitutions (5) et (7), savoir celles qui définissent $\mathcal{G}$ (4e partie, n° 56) :

$$y' \gtreqless 0, \qquad u + x' > v + y'.$$

On a, comme dans la quatrième partie, $u' \geqq 0$ et < 1, $v' > 0$ et < 1, donc les mêmes inégalités pour u et v.

Il vient ainsi

$$\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) = \frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s} \underset{u,v}{\mathcal{S}} \mathcal{G}(s, u, v).$$

Changeons α en $M - \alpha$ et β en $M - \beta$; nous aurons une nouvelle décomposition correspondant à la précédente. A tout système (u, v) de la première décomposition où u n'est pas nul, correspond le système $(1 - u, 1 - v)$ dans la seconde. Celui-ci s'obtient en changeant, dans u et v,

$$\begin{array}{lcl} \alpha \text{ en } M - \alpha & \text{et} & \beta \text{ en } M - \beta, \\ \alpha' \text{ en } b - 1 - \alpha' & \text{et} & \beta' \text{ en } a - 1 - \beta', \end{array}$$

ce qui change déjà u' en $1 - u'$ et v' en $1 - v'$; puis

$$\alpha'' \text{ en } T - 1 - \alpha'' \qquad \text{et} \qquad \beta'' \text{ en } bU - 1 - \beta'',$$

ce qui change u en $1 - u$ et v en $1 - v$.

De même, à tout système $(0, v)$ de la première décomposition, correspond le système $(0, 1 - v)$ dans la seconde. Celui-ci s'obtient en conservant $\alpha'' = 0$ (u' ne peut être nul que si $\alpha'' = 0$) et en faisant, à part cela, les mêmes substitutions que précédemment.

Par conséquent, la somme

$$\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) + \mathfrak{M}(M - \alpha, M - \beta, s)$$

se met sous la forme

$$\frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s} \underset{u,v}{\mathcal{S}} \Big[\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1 - u, 1 - v) \Big]$$
$$+ \frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s} \underset{o,v}{\mathcal{S}} \Big[\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v) \Big].$$

Le nombre des systèmes (u, v), c'est-à-dire des systèmes $(\alpha', \beta', \alpha'', \beta'')$ est ab^2UT; chacun des crochets correspondants

est de la forme (4e partie, nos 74 et 82)

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}+\theta(s)$$

$$=\frac{1}{s-1}\frac{T}{U\sqrt{D}}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)+\theta(s);$$

la somme des crochets devient donc, par cette substitution,

$$\frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s}\left[\frac{ab^2T^2}{\sqrt{D}}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)\frac{1}{s-1}+\theta(s)\right],$$

ce qui équivaut à la forme proposée dans l'énoncé du théorème.

Il y a à remarquer toutefois que les formules que nous venons d'employer n'ont été établies, dans la quatrième partie, que pour u différent de v. Mais cette condition est réalisée ici, grâce aux hypothèses faites sur les coefficients a, b, c et sur β. On déduirait en effet de $u=v$, par les formules (8) :

$$bU(u'+\alpha'')=T(v'+\beta''),$$

d'où, en remplaçant u' et v' par leurs valeurs (6) et chassant les dénominateurs,

$$U(a\alpha+b\beta)\equiv T\beta \pmod{M};$$

puis, a et b ainsi que M étant multiples de D,

$$T\beta\equiv 0 \pmod{D},$$

ce qui est impossible, car β est premier à D, par hypothèse, et T l'est aussi, en vertu de la relation $T^2-DU^2=1$.

5. Théorème. *Si le déterminant* D *est positif et si* β *est compris entre* 0 *et* M *et premier à* D, *la fonction*

$$\mathfrak{M}(0,\beta,s)+\mathfrak{M}(0,M-\beta,s),$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{M^2\sqrt{D}}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)\frac{1}{s-1}+\theta(s),$$

où $\theta(s)$ *est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

On trouve en effet, par les deux substitutions successives de la démonstration précédente et comme dans ce cas,

$$\mathfrak{M}(0,\beta,s)=\frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s}\underset{u,v}{S}\,\mathcal{G}(s,u,v).$$

Comparons à cette première décomposition la décomposition analogue effectuée sur $\mathfrak{M}(0, M-\beta, s)$. A tout système (u, v) de la première où u n'est pas nul correspond le système $(1-u, 1-v)$ dans la seconde par le changement de

$$\beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'',$$

en

$$M-\beta,\quad b-1-\alpha',\quad a-1-\beta',\quad T-1-\alpha'',\quad bU-1-\beta'';$$

de même, à tout système $(0, v)$ correspond le système $(0, 1-v)$ qui s'en déduit par les mêmes changements, sauf qu'on garde $\alpha''=0$ dans les deux cas. La démonstration s'achèvera donc comme la précédente.

§ 2. *Étude de la fonction* $Q(s, c, \chi)$

6. *Première définition de* $Q(s, c, \chi)$. Soit c une classe proprement primitive de formes (positives) du déterminant D, positif ou négatif. Choisissons, dans cette classe, une forme

$$f=(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2,$$

soumise aux conditions du n° 1, et désignons, comme dans la deuxième partie du Mémoire, par $\chi(n)$ les caractères de n (mod M), le nombre M étant toujours supposé pair et divisible par D.

La fonction $Q(s, c, \chi)$, analogue aux fonctions $Q(s, c)$ des

parties précédentes, sera définie par la somme double

$$(10). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c, \chi) = \sum_{x, y} \frac{\chi(x, y)}{(x, y)^s},$$

où l'on donne à x, y tous les systèmes de valeurs entières pour lesquelles la forme $f = (x, y)$ est première à M. De plus, si D est positif, ces valeurs doivent vérifier les conditions connues :

$$y \gtreqless 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y.$$

Il résulte de là que $Q(s, c, \chi)$ ne dépend pas du choix de la forme f dans la classe c.

7. *Réduction de la fonction* Q *à la fonction* $\mathfrak{M}$. Désignons, en général, par α, β les systèmes de nombres positifs $<$ M, pour lesquels

$$f = (\alpha, \beta)$$

est premier à M. Tous les systèmes

$$\begin{cases} x = \alpha + Mm, \\ y = \beta + Mn, \end{cases}$$

donneront $(x, y) \equiv (\alpha, \beta)$ (mod M). Ils rendront donc f premier à M et l'on aura, en outre,

$$\chi(x, y) = \chi(\alpha, \beta);$$

d'où la décomposition

$$(11). \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c, \chi) = \sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha, \beta) \mathfrak{M}(\alpha, \beta, s).$$

On a d'ailleurs

$$(\alpha, \beta) \equiv (M - \alpha, M - \beta) \pmod{M}$$
$$(0, \beta) \equiv (0, M - \beta) \pmod{M}.$$

Dans le cas d'un déterminant positif, on pourra donc décomposer Q en sommes de la manière suivante :

$$\sum \chi(\alpha, \beta) [\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) + \mathfrak{M}(M - \alpha, M - \beta, s)]$$

$$+ \sum \chi(0, \beta) [\mathfrak{M}(0, \beta, s) + \mathfrak{M}(0, M - \beta, s)].$$

Il résulte de là, par les théorèmes des n°s 3, 4 et 5 :

1° Que si D est un déterminant négatif $(-\Delta)$, on a

$$(12). \quad . \quad . \quad Q(s, c, \chi) = \frac{1}{s-1} \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}} \sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha, \beta) + \theta(s);$$

2° Que si D est positif,

$$(13) \quad Q(s, c, \chi) = \frac{1}{s-1} \frac{1}{2M^2\sqrt{D}} \log\left(T + U\sqrt{D}\right) \sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha, \beta) + \theta(s),$$

où la somme Σ s'étend à toutes les combinaisons α, β et où $\theta(s)$ est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition Θ.

On conclut de là le théorème suivant :

8. Théorème. *La fonction*

$$(s-1)\, Q(s, c, \chi)$$

est, dans tous les cas, une fonction entière dans tout le plan s, *qui vérifie la condition* Θ.

9. *Remarque.* Les caractères (mod M) renferment en particulier les caractères (mod D), puisque D divise M. Si χ est un caractère *bilatéral* (mod D) (*), $\chi(m)$ a la même valeur ± 1 pour tous les nombres premiers à 2D et représentables par la même forme (**). Si l'on désigne par λ le nombre des systèmes (α, β),

---

(*) Nous appelons caractère *bilatéral* (*ambigu* de Dirichlet, *zweiseitig* de M. Dedekind) un caractère qui coïncide avec son opposé. Un tel caractère est exclusivement formé de racines réelles, sa valeur est toujours égale à ± 1 et son carré χ^2 est identique au caractère principal.

(**) Si m et m' sont représentables par la même forme, m' admet une représentation par une forme ayant m pour premier coefficient, par exemple

$$mx^2 + 2bxy + cy^2 = m' ;$$

d'où, en multipliant par m,

$$(mx + by)^2 - Dy^2 = mm'.$$

Donc le produit mm' est congru à un carré (mod D).

Par conséquent, si χ est bilatéral, $\chi(mm') = 1$ et $\chi(m) = \chi(m')$.

on aura donc, dans ce cas particulier,

$$Q(s, c, \chi) = \pm \frac{1}{s-1} \frac{\pi\lambda}{M^2\sqrt{\Delta}} + \theta(s),$$

ou bien

$$Q(s, c, \chi) = \pm \frac{1}{s-1} \frac{\lambda}{2M^2\sqrt{D}} \log\left(T + U\sqrt{D}\right) + \theta(s),$$

de sorte que la fonction a toujours un pôle pour $s = 1$, si χ est un caractère bilatéral (mod D).

Il sera démontré plus loin (n° 24) qu'elle n'a de pôle que dans ce cas, de sorte que $\Sigma\chi(\alpha, \beta)$ est toujours nulle, sauf si χ est un caractère bilatéral (mod D). Un des principaux avantages de la méthode que nous exposons est de nous dispenser d'établir ce résultat directement.

§ 3. *Étude de la fonction* $L(s, k, \chi)$

10. Nous avons raisonné, dans les deux parties précédentes du Mémoire, sur l'identité

$$\sum_{i=1}^{h} k(c_i)\, Q(s, c_i) = \tau \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}} \prod_q \frac{1}{[1 - q^{-s}k(c_q)][1 - q^{-s}k(c_q^{-1})]},$$

où τ est égal au nombre des solutions de l'équation de Pell dans le cas d'un déterminant négatif, et à *un* dans le cas d'un déterminant positif.

Si l'on remplace au second membre les nombres p^{-2s} et q^{-s} par $\chi(p^2)p^{-2s}$ et $\chi(q)q^{-s}$ et se restreint aux nombres premiers à M, il faudra remplacer au premier membre, dans chacune des fonctions $Q(s, c_i) = \Sigma m^{-s}$, les termes m^{-s} (qui proviennent tous d'un produit de facteurs p^{-2s} et q^{-s}) par $\chi(m)m^{-s}$.

On obtiendra ainsi l'identité

$$\sum_{i=1}^{h} k(c_i)\, Q(s, c_i, \chi)$$
$$= \tau \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p^2)p^{-2s}} \prod_q \frac{1}{[1 - q^{-s}\chi(q)k(c_q)][1 - q^{-s}\chi(q)k(c_q^{-1})]}.$$

Posons, en abrégé, par analogie avec la fonction $P(s)$,

$$(14). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P(s, \chi) = \tau \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p^2) p^{-2s}};$$

et définissons, pour toute valeur de s, la fonction $L(s, k, \chi)$ par la formule

$$(15). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad L(s, k, \chi) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i) Q(s, c_i, \chi);$$

on aura, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$(16) \quad L(s, k, \chi) = P(s, \chi) \prod_q \frac{1}{[1 - q^{-s}\chi(q) k(c_q)][1 - q^{-s}\chi(q) k(c_q^{-1})]}.$$

11. *Propriétés des fonctions* $L(s, k, \chi)$. Ces fonctions correspondent exactement aux fonctions $L(s, k)$ des parties précédentes.

Leur définition par la formule (15) montre qu'elles ne peuvent avoir que le seul pôle $s = 1$ et que, si ce point n'est pas un pôle, les fonctions vérifient la condition Θ.

Les seules propriétés que nous utiliserons au chapitre qui suit sont les suivantes :

1° *Dans tous les cas, la fonction*

$$(s - 1) L(s, k, \chi)$$

est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition Θ;

2° *La fonction* $L(s, k, \chi)$ *ne change pas par la permutation de* k *en* k^{-1};

3° *La fonction* $L(s, k_0, \chi_0)$, *qui correspond aux deux caractères principaux, a un pôle simple pour* $s = 1$.

La première et la troisième propriétés résultent de la formule (15) et des propriétés de la fonction Q; la seconde résulte de la formule (16) et des relations

$$k^{-1}(c_q) = k(c_q^{-1}), \qquad k^{-1}(c_q^{-1}) = k(c_q).$$

CHAPITRE II.

Infinité des nombres premiers qui sont a la fois d'une forme linéaire et d'une forme quadratique

§ 1. *Restrictions que comporte la question*

12. *Restrictions dans le choix de la progression.* Dans les parties précédentes du Mémoire, nous avons éliminé systématiquement tout ce qui a rapport à la loi de réciprocité de Legendre, parce que cette loi n'intervenait qu'artificiellement dans la question. Au point où nous en sommes arrivés, il n'en est plus de même, mais cette loi ne doit servir d'appui qu'à quelques remarques extrêmement simples.

Nous avons à déterminer si la progression arithmétique $Mx+N$ peut renfermer des nombres premiers représentables par une forme quadratique du déterminant D. Pour traiter la question sous sa forme la plus générale, nous supposerons que M est un multiple de D et de 4.

Il y a $\varphi(M)$ progressions différentes de raison M renfermant des nombres premiers, mais la moitié sont à éliminer, de prime abord, comme ne contenant aucun nombre représentable par des formes du déterminant D. En effet, pour qu'un nombre m, premier à 2D, soit représentable par une forme du déterminant D, il faut que D soit résidu quadratrique de m. Il est nécessaire pour cela que le symbole de Jacobi $\left(\frac{D}{m}\right)$ soit égale à $(+1)$. Cette condition devient même suffisante quand m est un nombre premier. Or, pour tout nombre m, appartenant à une progression déterminée,

$$m = Mx + N \equiv N \pmod{D \quad \text{et} \quad 4},$$

on a, par la loi de réciprocité et les propriétés bien connues du symbole de Jacobi,

$$\left(\frac{D}{Mx+N}\right) = \left(\frac{D}{N}\right).$$

Donc les seules progressions $Mx + N$ qui puissent contenir des nombres représentables par des formes du déterminant D, sont celles pour lesquelles

$$\left(\frac{D}{N}\right) = 1.$$

Dans la suite, nous nous bornerons aux seules valeurs de N qui vérifient cette condition, tandis que nous désignerons par N′ celles pour lesquelles

$$\left(\frac{D}{N'}\right) = -1.$$

13. *Restrictions dans le choix des classes.* Après la restriction précédente, tous les nombres premiers de la forme $Mx + N$ sont aussi représentables par des formes du déterminant D, mais ces représentations ne se font pas par des classes quelconques.

On sait que, quand deux nombres m et m', premiers à 2D, sont représentables par la même forme, leur produit mm' est résidu quadratique de D (*), c'est-à-dire que l'on peut vérifier la congruence

$$mm' \equiv x^2 \pmod{D}.$$

On est convenu, avec Gauss, de dire que deux classes c et c' sont *du même genre* quand les nombres m et m' qu'elles représentent respectivement vérifient cette condition.

Il résulte de cette définition que les nombres de la progression $Mx + N$ ne peuvent être représentés que par des formes du même genre, car, M étant multiple de D, on a, quels que soient x et x',

$$(Mx + N)(Mx' + N) \equiv N^2 \pmod{D}.$$

Pour abréger le discours, nous dirons que ces formes sont du genre (N).

La démonstration que nous devons faire se réduit ainsi à établir que toute classe du genre (N) peut représenter une infinité de nombres premiers de la forme $Mx + N$.

(*) Voir la note au n° 9

14. *Remarques.* I. Pour tous les nombres m premiers à 2D, représentables par les classes du même genre, les caractères bilatéraux χ (m, mod D) ont la même valeur (voir n° 9).

II. Les classes qui peuvent représenter des nombres congrus à un carré (mod D) sont dites du *genre principal.* On démontre, dans la théorie des genres, que celles-là sont toujours formées par *duplication.*

III. Le *nombre des genres* dépend uniquement des facteurs premiers impairs de D et de la puissance de 2 qui divise D; ce nombre est égal à la moitié du nombre des caractères bilatéraux (mod D).

IV. Si μ désigne le nombre des classes fondamentales qui appartiennent à des exposants impairs, le nombre des genres est égal à 2^{μ} (*) et ce nombre est aussi celui des caractères bilatéraux k. Donc le nombre des caractères de classes qui sont bilatéraux est égal à celui des genres.

§ 2. *Aucune fonction* L (s, k, χ) *ne s'annule pour* s = 1

15. *Démonstration d'une équation fondamentale.* Multiplions l'équation (16) du n° 10 par $(s-1)$, faisons tendre s vers l'unité et passons à la limite; il viendra, en négligeant des termes qui sont nuls,

$$(1)\quad \lim_{s=1}(s-1)\sum_{q}\chi(q)\frac{k(c_q)+k(c_q^{-1})}{q^s}lq = -\lim_{s=1}(s-1)\frac{L'(s,k,\chi)}{L(s,k,\chi)}.$$

Le second membre est égal à 0, + 1 ou — 1, suivant que $s=1$ est un point ordinaire, un pôle ou un zéro (nécessairement simples) de L (s, k, χ).

16. *Transformation de cette équation.* Désignons, en général, par $q_{c,N}$ les nombres premiers de la forme linéaire $Mx+N$ et

(*) Voir, sur ce point, la *Zahlentheorie* de M. P. Bachmann (1re partie) ou nos *Recherches arithmétiques sur la composition des formes* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1896).

d'une forme quadratique de la classe c du genre (N). La somme au premier membre de l'équation (1) ne diffère que par l'ordre des termes de la suivante :

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{c,\,N}\left[e\,k(c_q)\,\chi\,(N)\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}}\right],$$

dans laquelle $e = 1$ ou 2 selon que c est bilatéral ou non, et où la somme $\Sigma_{c,\,N}$ s'étend à toutes les combinaisons (c, N), lesquelles sont en nombre limité. On tire de là, par (1) :

$$(3) \qquad \sum_{c,\,N}\left[e\,k(c_q)\,\chi\,(N)\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}}\right] = 0,\ +1 \text{ ou } -1,$$

suivant que $s = 1$ est un point ordinaire, un pôle ou un zéro de $L(s, k, \chi)$. En particulier, $s = 1$ étant un pôle dans le cas des caractères principaux, on a

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{c,\,N}\left[e\lim(s-1)\sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}}\right] = 1.$$

17. *Deux conséquences préliminaires.* En supposant s réel et > 1, on tire de la comparaison des équations (3) et (4) les conclusions suivantes :

1° Si $s = 1$ est un pôle de $L(s, k, \chi)$, la somme $\Sigma_{c,\,N}$ du premier membre de l'équation (3) est égale à la somme des modules de chacun de ses termes. Donc chaque terme séparément est égal à son module, ce qui exige qu'on ait, pour chaque combinaison (c, N), respectivement :

$$k(c)\,\chi\,(N) = 1, \quad \text{sauf si} \quad \lim(s-1)\sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}} = 0;$$

2° Si $s = 1$ est un zéro de $L(s, k, \chi)$, cette même somme $\Sigma_{c,\,N}$ est égale en signe contraire à la somme des modules de chacun de ses termes. Donc la même relation a lieu pour chaque terme séparément, ce qui exige qu'on ait pour chaque combinaison (c, N) respectivement :

$$k(c)\,\chi\,(N) = -1, \quad \text{sauf si} \quad \lim_{s=1}(s-1)\sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}} = 0.$$

18. Lemme I. *Le groupe des fonctions* L (s, k, χ) *du même caractère* k *ne peut présenter en même temps des pôles et des zéros pour* s = 1. *En d'autres termes, il est impossible que deux fonctions* L (s, k, χ) *formées avec le même caractère* k *aient l'une un pôle et l'autre un zéro pour* s = 1.

Si l'on remarque que tous les nombres premiers q_1 de la forme $Mx + 1$ sont représentables par des formes du déterminant D et que l'on a (2e partie, n° 69)

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_{q_1} \frac{lq_1}{q_1^s} = \frac{1}{\varphi(M)},$$

on doit admettre qu'il existe au moins une classe c pour laquelle

$$\lim (s-1) \sum_{q} \frac{lq_{c,1}}{q_{c,1}^s} > 0.$$

Appliquons successivement les deux conséquences du numéro précédent. Il viendra, pour cette classe c et pour un caractère χ arbitraire (car $\chi(1) = 1$ quel que soit χ) :

1°) $k(c) = 1$, si L (s, k, χ) a un pôle;
2°) $k(c) = -1$, si L (s, k, χ) a un zéro,

et ces deux conséquences s'excluent pour un même caractère k.

19. Lemme II. *Le groupe des fonctions* L (s, k, χ) *du même caractère* χ *ne peut présenter en même temps des pôles et des zéros pour* s = 1.

Désignons par q_{c0} les nombres représentables par la classe principale c^0 qui est bilatérale; on a, comme on le sait (3e partie, n° 25) :

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_{q} \frac{lq_{c0}}{q_{c0}^s} = \frac{1}{2h}.$$

Donc il existe au moins une forme $Mx + N$ pour laquelle

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_{q} \frac{lq_{c0,N}}{q_{c0,N}^s} > 0.$$

On aura, pour ce nombre N et pour un caractère k arbitraire (car $k(c^0) = 1$ quel que soit k) :

$$1^\circ)\quad \chi(\mathrm{N}) = 1, \qquad \text{si} \quad \mathrm{L}(s, k, \chi) \text{ a un pôle};$$
$$2^\circ)\quad \chi(\mathrm{N}) = -1, \qquad \text{si} \quad \mathrm{L}(s, k, \chi) \text{ a un zéro},$$

et ces deux conclusions s'excluent pour un même caractère χ.

20. Lemme III. *Le groupe des fonctions* L (s, k, χ) *du même caractère* χ *ne peut présenter qu'un seul pôle ou un seul zéro pour* s = 1 *et, dans ce cas, la fonction qui s'annule ou qui a un pôle est formée avec un caractère* k *bilatéral.*

Additionnons membre à membre toutes les équations qui se déduisent de l'équation (1) du n° 15 par la variation du seul caractère k. Il ne subsistera au premier membre que les nombres premiers q_{c0} représentables par la classe principale, et l'on aura l'équation

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \chi(q_{c0}) \frac{lq_{c0}}{q_{c0}^s} = -\lim_{s=1} (s-1) \mathop{\mathrm{S}}_k \frac{\mathrm{L}'(s, k, \chi)}{\mathrm{L}(s, k, \chi)}.$$

Le premier membre, où l'on peut supposer s réel et > 1, ne peut surpasser en valeur absolue la somme des modules de ses termes, qui est

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c0}}{q_{c0}^s} = 1.$$

Les zéros et les pôles s'excluant (n° 19), le second membre est égal, au signe près, au nombre des fonctions successives $\mathrm{L}(s, k, \chi)$ qui ont un zéro ou un pôle pour $s = 1$ quand on donne successivement à k toutes ses valeurs. Il ne peut donc y en avoir qu'une seule et, si elle existe, elle correspond à un caractère k bilatéral, sans quoi deux fonctions successives mais égales $\mathrm{L}(s, k, \chi)$ et $\mathrm{L}(s, k^{-1}, \chi)$ auraient un zéro ou un pôle pour $s = 1$.

21. Théorème. *Aucune fonction* L (s, k, χ) *ne s'annule pour* s = 1. *Celles qui ont un pôle sont formées avec un caractère* k

bilatéral et à tout caractère k *bilatéral correspondent deux caractères* χ *et* χ' *et deux seulement pour lesquels* L (s, k, χ) *a un pôle pour* s = 1.

Additionnons toutes les équations qui se déduisent de (1) par la variation du seul caractère χ. Il ne subsistera dans la somme du premier membre que les nombres premiers q_1 de la forme $Mx + 1$ et l'on aura

$$\varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q [k(c_q) + k(c_q^{-1})] \frac{lq_1}{q_1^s} = -\lim (s-1) \underset{\chi}{\mathrm{S}} \frac{L'(s, k, \chi)}{L(s, k, \chi)}.$$

En vertu du lemme III, L (s, k, χ) n'a de zéro ou de pôle que si k est bilatéral. Supposons donc que k soit un caractère bilatéral; on aura pour tous les nombres q_1 de la forme $Mx + 1$

$$k(c_q) = k(c_q^{-1}) = 1,$$

car c_q et c_q^{-1} sont des classes du genre principal, et par conséquent formées par duplication. Le premier membre de l'équation se réduit donc à

$$2\varphi(M) \lim (s-1) \sum_q \frac{lq_1}{q_1^s} = 2,$$

en vertu des conclusions de la seconde partie (n° 69). Il y a par conséquent, au second membre, puisque les zéros et les pôles s'excluent, deux fonctions seulement L (s, k, χ) et L (s, k, χ') qui ont un pôle pour $s = 1$ et aucune n'a de zéro. Le théorème est donc démontré.

§ 3. *Détermination des fonctions* L (s, k, χ) *qui ont un pôle*

22. Théorème. *Étant donné un caractère* k *bilatéral, les deux caractères* χ *et* χ' *pour lesquels* L (s, k, χ) *a un pôle sont des caractères bilatéraux* (mod D).

Soit d'abord N un nombre pour lequel $\left(\frac{D}{N}\right) = 1$. Multiplions l'équation (1) par $\chi(N)$ et sommons par rapport à tous les caractères bilatéraux (mod D), qui sont tous compris au nombre des

caractères (mod M) puisque D divise M. La somme accentuée,

$$\underset{\chi}{S'}\chi(qN),$$

étendue à ces caractères bilatéraux (mod D) sera nulle, sauf pour les nombres q' dont le produit qN est résidu quadratique de D, c'est-à-dire ceux qui sont représentables par les formes du genre (N) (en particulier, tous ceux de la forme $Mx + N$).

Si l'on suppose que k soit bilatéral, le caractère $k(c)$ conserve la même valeur pour toutes les classes du genre (N), que nous désignerons en général par c_N, car elles dérivent toutes de la combinaison de l'une d'elles avec des classes du genre principal qui sont formées par duplication.

Il vient donc, en désignant par g le nombre des genres et en général par $2g$ le nombre des caractères bilatéraux (mod D), qui est égal au double du nombre des genres,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad 2(2g)k(c_N)\lim_{s=1}(s-1)\sum_q \frac{lq'}{q'^s} = S''\chi(N),$$

où la somme S'' du second membre s'étend aux caractères bilatéraux χ (mod D) pour lesquels $L(s, k, \chi)$ a un pôle et dont il existe au plus deux pour un même k.

Si l'on désigne maintenant par N' un nombre pour lequel $\left(\frac{D}{N'}\right) = -1$ et si l'on remplace N par N' dans le calcul que nous venons de faire, le premier membre de l'équation (5) sera remplacé par zéro car le genre (N') n'existe pas, et l'on aura

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0 = S''\chi(N').$$

En vertu de (5), la somme S'' renferme au moins un terme, car le premier membre de (5) ne peut être nul; en vertu de (6), il en renferme au moins deux, sans quoi le second membre de (6) ne pourrait être nul.

Si k est bilatéral, il y a donc au moins deux caractères bilatéraux χ et χ' (mod D) pour lesquels $L(s, k, \chi)$ et $L(s, k, \chi')$ ont un pôle. Il ne peut y en avoir d'autres, même (mod M), en vertu de 21. Donc le théorème est démontré.

23. Théorème. *A tout caractère bilatéral* χ (mod D) *correspond un caractère bilatéral* k *pour lequel* L (s, k, χ) *a un pôle.*

Bornons-nous à la considération des caractères bilatéraux. On sait que le nombre des genres est alors égal au nombre des caractères de classes et à la moitié des caractères (mod D). Donc le nombre des caractères k est la moitié de celui des caractères χ (mod D). A tout caractère k correspondent deux caractères χ pour lesquels L (s, k, χ) a un pôle (n° 22), et à un caractère χ ne peut correspondre qu'un seul caractère k (n° 20). Donc la série des fonctions qui ont un pôle épuise la série des caractères k et χ (mod D) qui sont bilatéraux.

24. Corollaire. *La fonction* Q (s, c, χ) *a un pôle si* χ *est un caractère bilatéral* (mod D) *et n'en a un que dans ce cas.*

La première partie a été établie au n° 9. Pour prouver la seconde, multiplions par $k(c)^{-1}$ l'équation suivante :

$$L(s, k, \chi) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i)\, Q(s, c_i, \chi),$$

et sommons par rapport aux caractères k; il viendra, en intervertissant l'ordre des deux membres,

$$ehQ(s, c, \chi) = \underset{k}{S}\, k(c)^{-1} L(s, k, \chi)$$

et le second membre ne peut avoir de pôles que si χ est un caractère bilatéral (mod D), comme on l'a vu au n° 22.

§ 4. *Infinité des nombres premiers* $q_{c,N}$

25. Revenons à l'équation (1) du paragraphe précédent, savoir

$$(1) \qquad \lim_{s=1}(s-1) \sum_{q} \chi(q)^{k(c_q) + k(c_q^{-1})} \frac{}{q^s}\, lq = -\lim_{s=1}(s-1) \frac{L'(s, k, \chi)}{L(s, k, \chi)};$$

multiplions-la par $\chi(N)^{-1}$ et sommons par rapport à tous les

caractères χ ; il ne subsistera au premier membre que les nombres premiers q_N de la forme $Mx + N$ et l'on trouvera :

1° Si k est un caractère non bilatéral, auquel cas aucune fonction $L(s, k, \chi)$ n'a de pôles au second membre (n° 21) :

$$(2^a). \quad . \quad . \quad \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q [k(c_q) + k(c_q^{-1})] \frac{lq_N}{q_N^s} = 0;$$

2° Si k est un caractère bilatéral, auquel cas deux fonctions $L(s, k, \chi)$ et $L(s, k, \chi')$ ont un pôle (n° 21) :

$$(2^b) \quad \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q [k(c_q) + k(c_q^{-1})] \frac{lq_N}{q_N^s} = \chi(N)^{-1} + \chi'(N)^{-1}.$$

Mais k étant bilatéral, $k(c)$ conserve la même valeur pour toutes les classes du genre (N), que nous représenterons en général par c_N ; on a donc dans la dernière équation

$$k(c_q) = k(c_q^{-1}) = k(c_N)$$

et l'équation elle-même devient

$$2k(c_N)\, \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_N}{q_N^s} = \chi(N)^{-1} + \chi'(N)^{-1}.$$

On en déduit par les théorèmes de la seconde partie (n° 69) et en se rappelant que χ et χ' sont bilatéraux (n° 22),

$$2k(c_N) = \chi(N)^{-1} + \chi'(N)^{-1} = \chi(N) + \chi'(N).$$

Donc, puisque tous ces caractères sont égaux à ± 1,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \chi(N) = \chi'(N) = k(c_N).$$

26. Soit maintenant c une classe du genre (N); multiplions les équations (2) du numéro précédent par $k(c)^{-1}$ et sommons par rapport à tous les caractères k; il viendra

$$eh\, \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_c}{q_{c,N}^s} = \mathop{S}_k k(c)^{-1} [\chi(N)^{-1} + \chi'(N)^{-1}],$$

relation dans laquelle $e = 2$ ou 1 suivant que la classe c est ou

n'est pas bilatérale, et où la somme du second membre s'étend à tous les caractères k bilatéraux. On remarquera que les deux caractères χ et χ' au second membre de cette équation dépendent de k et sont les deux caractères bilatéraux pour lesquels $L(s, k, \chi)$ a un pôle. Donc, en vertu des relations (3), chaque terme du second membre est égal à 2; le nombre des termes est égal à celui des caractères k bilatéraux, c'est-à-dire à celui des genres et, par conséquent, en désignant par g le nombre des genres, il vient

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad eh\,\varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c,N}}{q^s_{c,N}} = 2g.$$

Cette équation prouve qu'il existe une infinité de nombres $q_{c,N}$ d'une forme linéaire $Mx + N$ et en même temps d'une forme quadratique de la classe c du genre (N). La fréquence de ces nombres est la même pour toutes les classes c bilatérales, la même aussi pour toutes les classes c non bilatérales, mais elle est moitié moindre dans le premier cas que dans le second. Ce résultat va se préciser encore au chapitre suivant.

CHAPITRE III

LOIS ASYMPTOTIQUES

27. Théorème. *Aucune des fonctions* $L(s, k, \chi)$ *n'a de racines de la forme* $1 + \beta i$.

Considérons l'expression

$$-\lim_{s=1+\beta i} (s-1-\beta i) \frac{L'(s, k, \chi)}{L(s, k, \chi)} = \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \chi(q) \frac{k(c_q) + k(c_q)^{-1}}{q^{s+\beta i}} lq;$$

elle est égale à zéro ou à $(-\lambda)$ suivant que $s = 1 + \beta i$ est un point ordinaire ou un zéro de degré λ de $L(s, k, \chi)$.

Additionnons toutes les équations qui se déduisent de la précédente par la variation du caractère k seul. Il ne subsistera au second membre que les nombres premiers q_{c0} représentables par

la classe principale. On trouvera donc

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - \sum \lambda = 2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \chi(q) \frac{lq_{c0}}{q_{c0}^{s+\beta i}},$$

où $\Sigma\lambda$ est la somme des ordres de multiplicité des zéros $(1+\beta i)$ pour les fonctions qui se déduisent successivement de $L(s, k, \chi)$ par la permutation de k. La somme du second membre, où l'on peut supposer s réel et > 1, ne peut surpasser la somme des modules de ses termes :

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c0}}{q_{c0}^s} = 1,$$

et, par conséquent, une seule au plus des fonctions $L(s, k, \chi)$ s'annule dans la série considérée et elle n'a, dans ce cas, qu'un zéro simple. Enfin, si cette fonction existe, elle doit être formée avec un caractère k bilatéral, sans quoi, les deux fonctions identiques $L(s, k, \chi)$ et $L(s, k^{-1}, \chi)$ s'annulant ensemble, deux fonctions s'annuleraient dans la série que l'on considère.

Montrons maintenant que ces dernières hypothèses elles-mêmes sont impossibles. Pour cela, ajoutons ensemble les équations (1) et (2) en faisant $\Sigma\lambda = 1$ dans la première et en y intervertissant l'ordre des deux membres; supposons s réel et négligeons la partie imaginaire; il viendra, en se rappelant que $\chi(q)$ est toujours réel pour un caractère bilatéral,

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q [1 + \chi(q) \cos \beta lq] \frac{lq_{c0}}{q_{c0}^s} = 0.$$

Tous les termes sont positifs; en les multipliant respectivement par $1 - \chi(q) \cos \beta lq$, qui est compris entre 0 et 2, et en observant que

$$2[1 + \chi(q) \cos \beta lq][1 - \chi(q) \cos \beta lq] = 1 - \cos 2\beta lq,$$

on trouvera aussi

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q (1 - \cos 2\beta lq) \frac{lq_{c0}}{q_{c0}^s} = 0.$$

Mais cette équation est impossible, car si l'on change β en 2β et χ en χ_0 dans les équations (1) et (2), et si l'on soustrait ces

équations l'une de l'autre, après avoir interverti l'ordre des deux membres de la première, on trouve, en négligeant la partie imaginaire,

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q (1 - \cos 2\beta lq) \frac{lq_{c0}}{q_{c0}} = 1 + \sum \lambda.$$

Le second membre est égal à *un* ou à *deux* suivant que $s = 1 + 2\beta i$ est un point ordinaire ou un zéro pour une des fonctions $L(s, k, \chi_0)$, mais il ne peut être nul. Donc, etc.

28. Nous avons maintenant étendu aux fonctions $L(s, k, \chi)$ toutes les propriétés des fonctions $L(s, k)$ et $Z(s, \chi)$ sur lesquelles repose l'analyse complémentaire des parties précédentes du Mémoire. Cette analyse s'étend donc aussi au cas actuel. Nous nous contenterons d'en indiquer les conclusions qui se déduisent par analogie à simple vue de la formule (4) qui termine le chapitre précédent.

Soient h le nombre des classes (positives) proprement primitives, g le nombre des genres et, par conséquent, $\frac{h}{g}$ le nombre des classes d'un même genre; désignons par $q_{c,N}$ les nombres premiers de la forme linéaire $Mx + N$ et d'une forme quadratique de la classe c du genre (N). On a les théorèmes suivants :

1° *L'expression*

$$\frac{e\varphi(M)}{2} \left(\frac{h}{g}\right) \frac{1}{y} \sum_{q<y} lq_{c,N}$$

où la somme s'étend aux nombres $q_{c,N}$ *qui sont* $< y$ *et où* e *est égal à* 2 *ou à* 1 *selon que la classe* c *est ou n'est pas bilatérale, a pour limite l'unité quand* y *tend vers l'infini.*

2° *Le nombre des nombres premiers* $q_{c,N}$ *qui sont* $< y$ *peut se représenter par l'expression*

$$(1 + \varepsilon) \frac{2}{e\left(\frac{h}{g}\right)\varphi(M)} \frac{y}{ly},$$

où ε *est infiniment petit pour* y *infiniment grand.*

QA
246
L38

La Vallée Poussin, Charles
Jean de
Recherches analytiques sur
la théorie des nombres
premiers

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY